



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$$

$$g(x) = x^2$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 4.1



4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de la función $y = f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Ambas funciones son polinómicas y su dominio es el conjunto de los números reales.

Se calcula la derivada de $f(x)$. $f'(x) = 4x^3 - 14x$

Igualo la derivada a cero: $4x^3 - 14x = 0 \rightarrow x \cdot (4x^2 - 14) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 14 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \approx \pm 1,87 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-2) < 0$ $f'(-1) > 0$ $f'(1) < 0$ $f'(2) > 0$

	$-\infty$	$-\sqrt{7/2}$	0	$\sqrt{7/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$					

$f(x)$ **crece** en $(-\sqrt{7/2}, 0) \cup (\sqrt{7/2}, +\infty)$
 $f(x)$ **decrece** en $(-\infty, -\sqrt{7/2}) \cup (0, \sqrt{7/2})$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de la función $y = f(x)$.

Se determina la naturaleza de los extremos relativos a partir del estudio de signos de la función derivada.

	$-\infty$	$-\sqrt{7/2}$	0	$\sqrt{7/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$					

En $x = -\sqrt{7/2}$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(-\sqrt{7/2}) = (-\sqrt{7/2})^4 - 7 \cdot (-\sqrt{7/2})^2 + 16 = 15/4$

En $x = 0$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16$

En $x = \sqrt{7/2}$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(\sqrt{7/2}) = (\sqrt{7/2})^4 - 7 \cdot (\sqrt{7/2})^2 + 16 = 15/4$

Mínimos relativos: $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ **Máximo relativo:** $(0, 16)$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Se calculan los puntos de corte entre las funciones. El día del examen no vale la pena gastar mucho tiempo en hacer la representación gráfica de las funciones. Aunque yo la haré después con fines pedagógicos.

$$f(x) = g(x) \longrightarrow x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \longrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \longrightarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \longrightarrow x^2 - 4 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Puesto que $f(x) - g(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0$, deducimos que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Puedes también demostrarlo sustituyendo por un valor del intervalo en ambas funciones.

$$f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16 \quad g(0) = 0^2 = 0$$

Dado que $f(0) > g(0)$, podemos afirmar que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

El área de la superficie encerrada se calcula mediante una integral.

$$A = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 h(x) dx$$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Se calcula $h(x)$ $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 7x^2 + 16 - x^2 = x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 \geq 0$

Se comprueba que $h(x)$ es una función par. Ello me permitirá calcular más fácilmente el valor de la integral.

$$h(-x) = (-x)^4 - 8 \cdot (-x)^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16 = h(x)$$

Dado que la función $h(x)$ es una función par, podemos calcular el área con: $A = 2 \cdot \int_0^2 h(x) dx$

$$A = 2 \cdot \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^5}{5} - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) - \left(\frac{0^5}{5} - \frac{8 \cdot 0^3}{3} + 16 \cdot 0 \right) \right]$$

$$A = 2 \cdot \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \frac{512}{15} \text{ unidades de área}$$

El área pedida es: $A = \frac{512}{15} \text{ u. a}$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Con fines pedagógicos se muestra el área calculada.

