

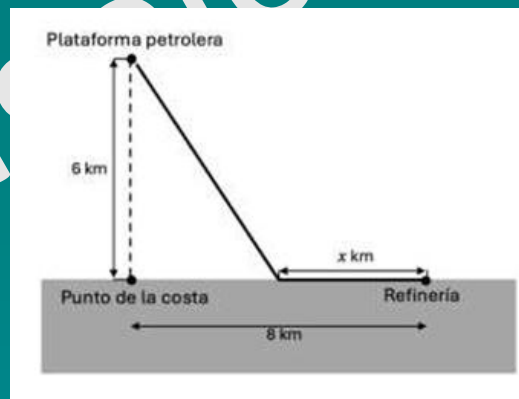


PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



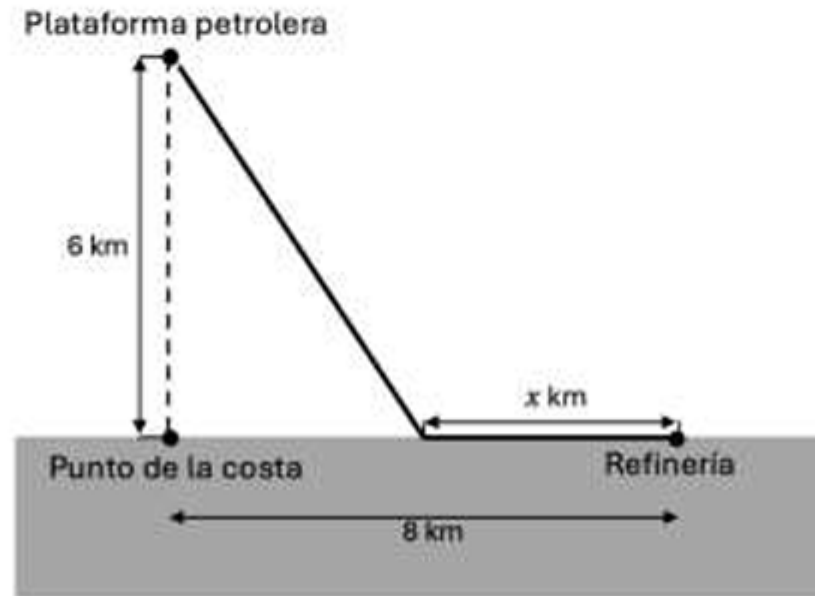
MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones



JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 4.2

4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P . Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



- 4.2.1 (0.5 puntos)** Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.
- 4.2.2 (1.5 puntos)** Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.
- 4.2.3 (0.5 puntos)** Calcular dicho coste.

Se definen las variables x e y .

x es la longitud del oleoducto construido sobre tierra.

y es la longitud del oleoducto construido bajo el mar.

El coste expresado en millones de euros es: $f(x, y) = 0,6x + y$

Se escribe la ecuación definida por la restricción del problema.

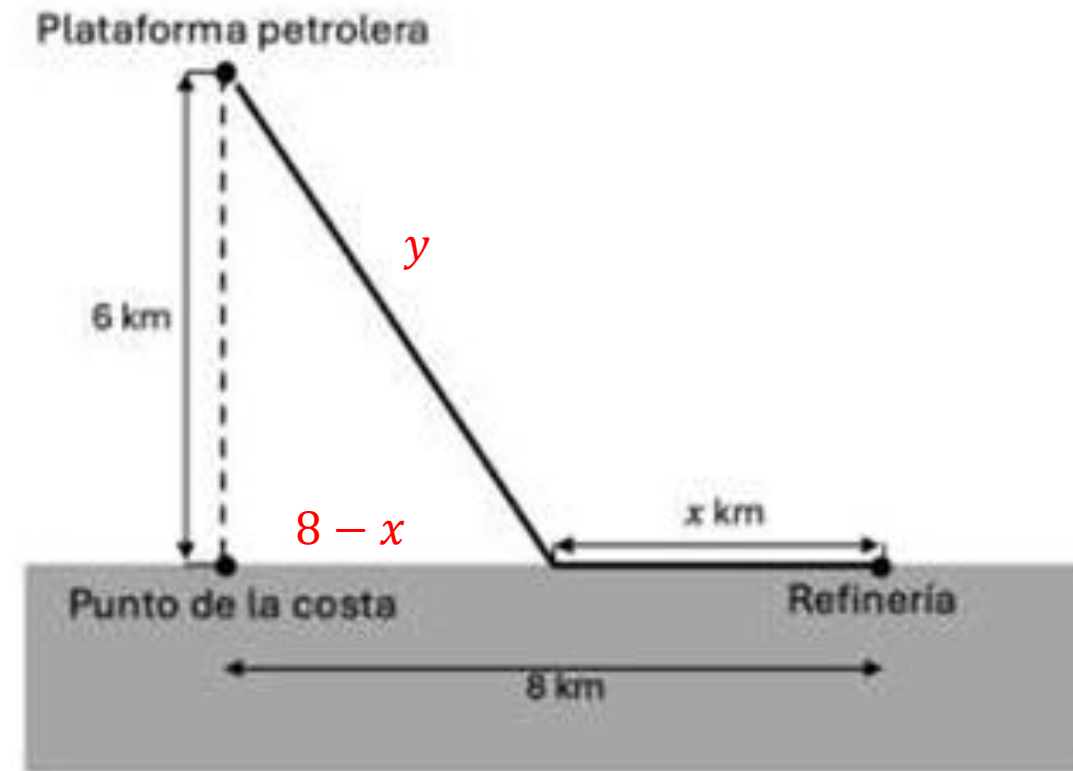
$$y^2 = 6^2 + (8 - x)^2 \quad \text{Se despeja } y: y = \sqrt{36 + (8 - x)^2}$$

Y se sustituye en la función objetivo. $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}$

Se define por completo la función con su dominio.

Dominio $f(x)$: $0 \leq x \leq 8$

La función de coste pedida es: $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}; \quad 0 \leq x \leq 8$



4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

Se deriva la función y se iguala a cero. $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}$; $0 \leq x \leq 8$

$$f'(x) = 0,6 + \frac{2 \cdot (8 - x) \cdot (-1)}{2 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0,6 + \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}}$$

$$f'(x) = 0; 0,6 + \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0 \rightarrow \frac{0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2} + x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0 \rightarrow 0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2} + x - 8 = 0$$

$$0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2} = 8 - x \rightarrow \left(0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2}\right)^2 = (8 - x)^2 \rightarrow 0,36 \cdot (36 + (8 - x)^2) = (8 - x)^2$$

$$12,96 + 0,36 \cdot (8 - x)^2 = (8 - x)^2 \rightarrow 12,96 = (8 - x)^2 - 0,36 \cdot (8 - x)^2 \rightarrow 12,96 = 0,64 \cdot (8 - x)^2$$

$$\frac{12,96}{0,64} = (8 - x)^2 \rightarrow 20,25 = (8 - x)^2 \rightarrow \pm\sqrt{20,25} = 8 - x \rightarrow \pm 4,5 = 8 - x \rightarrow \begin{cases} x = 12,5 \\ x = 3,5 \end{cases}$$

La única solución que pertenece al dominio de la función es: $x = 3,5$

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

Se comprueba que el valor obtenido de x , minimiza el valor del coste del oleoducto. $f'(x) = 0,6 + \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}}$

Para ello se hace un estudio de signos de la derivada alrededor de $x = 3,5$

	0	3,5	8
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$$f'(2) = 0,6 + \frac{2 - 8}{\sqrt{36 + (8 - 2)^2}} \approx -0,107 < 0$$

$$f'(5) = 0,6 + \frac{5 - 8}{\sqrt{36 + (8 - 5)^2}} \approx +0,153 > 0$$

Dado que $f(x)$ decrece si $0 \leq x < 3,5$ y $f(x)$ crece si $3,5 < x \leq 8$, podemos afirmar que $x = \mathbf{3,5 \text{ km}}$ minimiza el coste de construcción del oleoducto.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

Se sustituye $x = 3,5$ en $f(x)$. $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}$; $0 \leq x \leq 8$

$$f(3,5) = 0,6 \cdot 3,5 + \sqrt{36 + (8 - 3,5)^2} = 9,6 \text{ millones de euros}$$

El coste mínimo del oleoducto es **9,6 millones de euros**.