



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

JULIO 2025 - PROBLEMA 1



PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las $\frac{3}{5}$ partes de sus publicaciones reciben un “*Like*”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “*Like*” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?
- 1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “*Likes*” en sus cuatro publicaciones?
- 1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “*Like*” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las 3/5 partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

Solución: Sea X el número de “Likes” que recibe Juana en sus cuatro publicaciones.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 4; p = 0,6; q = 1 - p = 0,4$ $X \sim Bi(4; 0,6)$

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256$

La probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones es **0,0256 (2,56 %)**.

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?

Solución: Sea X el número de “Likes” que recibe Juana en sus cuatro publicaciones.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 4; p = 0,6; q = 0,4$ $X \sim Bi(4; 0,6)$

Se calcula la probabilidad pedida, nos piden lo contrario de recibir más de 2 “Likes”: $1 - P(X > 2) = P(X \leq 2)$

Para poder utilizar la tabla, el valor de p debe ser menor que 0,5. En este caso, habría que hacer un cambio de variable (tal como he explicado en otros vídeos). Pero en este caso, creo que no vale la pena complicar la resolución y por ello lo haré el cálculo usando la fórmula de la probabilidad.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3 = 0,1536$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,3456$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,0256 + 0,1536 + 0,3456 = 0,5248$$

La probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones es **0,5248 (52,48 %)**.

1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

Solución: Sea X el número de “Likes” que recibe Juana en sus cuatro publicaciones.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 4; p = 0,6; q = 0,4$ $X \sim \mathbf{Bi}(4; 0,6)$

$$P(X \geq 1) > 0,999 \longrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,999 \longrightarrow -P(X = 0) > -0,001 \longrightarrow P(X = 0) < 0,001$$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^n < 0,001 \longrightarrow 0,4^n < 0,001 \longrightarrow \ln(0,4^n) < \ln(0,001)$$

$$n \cdot \ln(0,4) < \ln(0,001) \longrightarrow n \cdot (-0,916) < -6,908 \longrightarrow 0,916n > 6,908 \longrightarrow n > \frac{6,908}{0,916} \longrightarrow n > 7,54$$

Como mínimo debe subir **8 publicaciones**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

www.angelcuesta.com

JULIO 2025 - PROBLEMA 2.1



Ejercicio 2.1

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

Se despeja la matriz X utilizando las propiedades de las matrices.

$$(A^{-1} \cdot X)^{-1} = A \cdot (B^2 \cdot A)^{-1} \xrightarrow{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}} X^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot (B^2)^{-1}$$

$$X^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot (B^2)^{-1} \xrightarrow[A^{-1} \cdot A = I]{A \cdot A^{-1} = I} X^{-1} \cdot A = I \cdot (B^2)^{-1} \longrightarrow X^{-1} \cdot A = (B^2)^{-1}$$

Se multiplica por la inversa de A en ambos lados de la igualdad.

$$X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1} \longrightarrow X^{-1} \cdot I = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1} \xrightarrow{B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}} X^{-1} = (A \cdot B^2)^{-1}$$

$$X^{-1} = (A \cdot B^2)^{-1} \longrightarrow X = A \cdot B^2$$

Se calcula X en la siguiente diapositiva.

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$. $X = A \cdot B^2$

Se calcula B^2 . $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Se calcula X . $X = A \cdot B^2 = A \cdot I = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

Se calcula el determinante aplicando las propiedades de los determinantes.

$$|(3 \cdot A^5 \cdot B)^2| \xrightarrow{|A^n| = |A|^n} |3 \cdot A^5 \cdot B|^2 \xrightarrow{|k \cdot A| = k^m \cdot |A|} (3^2 \cdot |A^5 \cdot B|)^2 \longrightarrow 81 \cdot |A^5 \cdot B|^2$$

$$81 \cdot |A^5 \cdot B|^2 \xrightarrow{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|} 81 \cdot (|A^5| \cdot |B|)^2 \xrightarrow{|A^n| = |A|^n} 81 \cdot (|A|^5 \cdot |B|)^2$$

Se calculan los determinantes A y B . $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 1$ $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

Se calcula el valor del determinante pedido. $|(3 \cdot A^5 \cdot B)^2| = 81 \cdot (1^5 \cdot (-1))^2 = 81$

$$|(3 \cdot A^5 \cdot B)^2| = 81$$

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

Se recuerda que $B^2 = I$, por lo que $B^{100} = (B^2)^{50} = I^{50} = I$.

Por otro lado, $B^{99} = B^{2 \cdot 49 + 1} = (B^2)^{49} \cdot B = I^{49} \cdot B = B$.

De forma que la expresión inicial se transforma en esta otra: $a \cdot B^{100} + b \cdot B^{99} = A + C \longrightarrow a \cdot I + b \cdot B = A + C$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos sus términos a_{ij} . $\begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \\ 0=0 \\ a-b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

Los valores pedidos son: **$a = 1$ y $b = 0$.**



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 2.2



Ejercicio 2.2

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}.$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

www.ange.

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a - 1$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $-a^2 - 2a - 1 = 0 \longrightarrow a = -1$

Si $a \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow[\text{3} \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo el valor de a en ambas matrices.

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $a = -1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\text{Si } a = -1 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A A

F_2	-1	-1	1	-1
F_1	1	1	-1	1
$F_2=F_2+F_1$	0	0	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A y A^* tienen, ambas, dos filas linealmente independientes. Para $a = -1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

F_3	-1	1	0	-1
F_1	1	1	-1	1
$F_3=3F_3-F_1$	0	2	-1	0

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado 2.2.1. Se aplica el teorema de Rouché para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -1$	2	2	3	S.C.I.	Infinito

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto para $a = -1$. Se aplica la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -a^2 - 2a - 1 = -(a + 1)^2$ **OJO A LA FACTORIZACIÓN**

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a^2 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-a \cdot (a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a^2 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-a \cdot (a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-2a^2 - 2a}{-(a+1)^2} = \frac{-2a \cdot (a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{2a}{a+1}$$

La solución del sistema si $a \neq -1$ es:

$$x = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{a}{a+1}$$

$$z = \frac{2a}{a+1}$$

BONUS

Para resolver el sistema de ecuaciones para $a = -1$ utilizaremos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior.

Asigno un parámetro a una de las incógnitas. En este caso $y = \lambda$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \lambda - z = 1 \\ 2\lambda - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + z - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

La solución del sistema si $a = -1$ es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi_1: x + 2y + mz = -1$$

$$\pi_2: x + z = 6$$



JULIO 2025 - PROBLEMA 3.1

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

Dos planos son perpendiculares si lo son también sus vectores normales. Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

Se obtienen los vectores normales de π_1 y π_2 . $\vec{n}_1 = (1, 2, m)$ $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$

Se obtiene el producto escalar, se iguala a cero y se obtiene el valor de m .

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, 2, m) \cdot (1, 0, 1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + m \cdot 1 = 1 + m = 0 \longrightarrow m = -1$$

El valor pedido es $m = -1$.

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

El ángulo que forman los planos es el mismo que el que forman sus vectores normales. Se aplica la fórmula.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \longrightarrow \cos(45^\circ) = \frac{|1 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 + m|}{\sqrt{5 + m^2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{5 + m^2} = |1 + m| \longrightarrow (\sqrt{5 + m^2})^2 = (|1 + m|)^2 \longrightarrow 5 + m^2 = 1 + 2m + m^2 \longrightarrow 2m = 4 \longrightarrow m = 2$$

El valor pedido es $m = 2$.

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

El vector director de la recta intersección es perpendicular a $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$. Se calcula con el producto vectorial.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - (1-m)\vec{j} - 2\vec{k} = (2, m-1, -2)$$

Se calcula un punto de dicha recta.

$$r: \begin{cases} x + 2y + mz = -1 \\ x + z = 6 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{2} \\ x = 6 \end{cases} \quad P = \left(6, -\frac{7}{2}, 0\right)$$

Siendo la ecuación de la recta pedida en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = \frac{-7}{2} + (m-1)\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 3x + y - z = 2$$

$$P = (0, 1, -1) \text{ y } Q = (1, a, 1)$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 3.2



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

La recta que pasa por P y Q estará contenida en el plano π cuando ambos puntos pertenezcan a dicho plano.

Se sustituyen las coordenadas de los puntos en la ecuación del plano.

$$P = (0, 1, -1) \longrightarrow 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2 \longrightarrow 2 = 2 \quad \text{Por lo tanto, } P \text{ pertenece a } \pi.$$

$$Q = (1, a, 1) \longrightarrow 3 \cdot 1 + a - 1 = 2 \longrightarrow a = 0 \quad \text{Por lo tanto, } a = 0 \text{ para que } Q \text{ esté contenido en } \pi.$$

Si $a = 0$ la recta que pasa por los puntos P y Q estará incluida en el plano π .

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0,1,-1)$ y $Q = (1,a,1)$, calcular:

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

Se sustituye el valor de a en Q . $Q = (1, 1, 1)$

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar perpendicular al plano que pase por Q .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto Q . $\vec{v}_r = \vec{n} = (3,1,-1)$ $Q = (1,1,1)$

2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán. $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

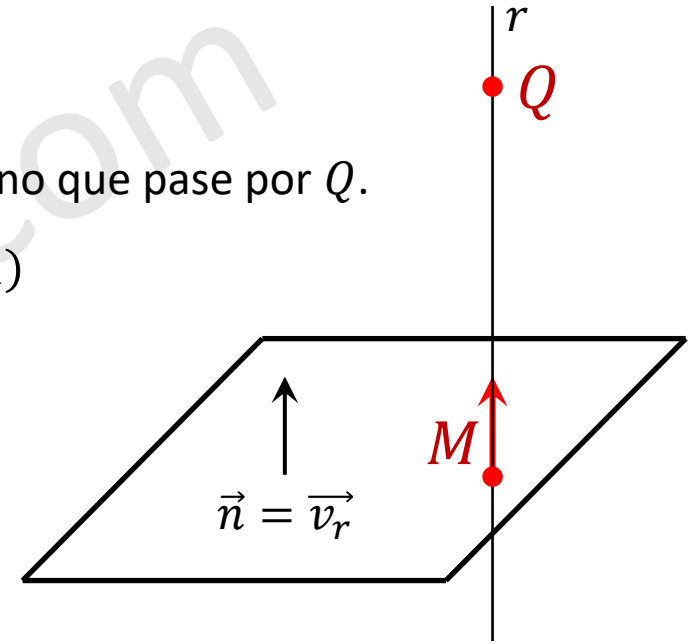
3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. M

Se sustituye r en π :

$$3x + y - z = 2 \rightarrow 3 \cdot (1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2 \rightarrow 11\lambda = -1 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{11}$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = \frac{-1}{11}$ en r . $M: \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \frac{-1}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 + \frac{-1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 - \frac{-1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases}$

$$M = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11} \right)$$



3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0,1,-1)$ y $Q = (1,a,1)$, calcular:

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

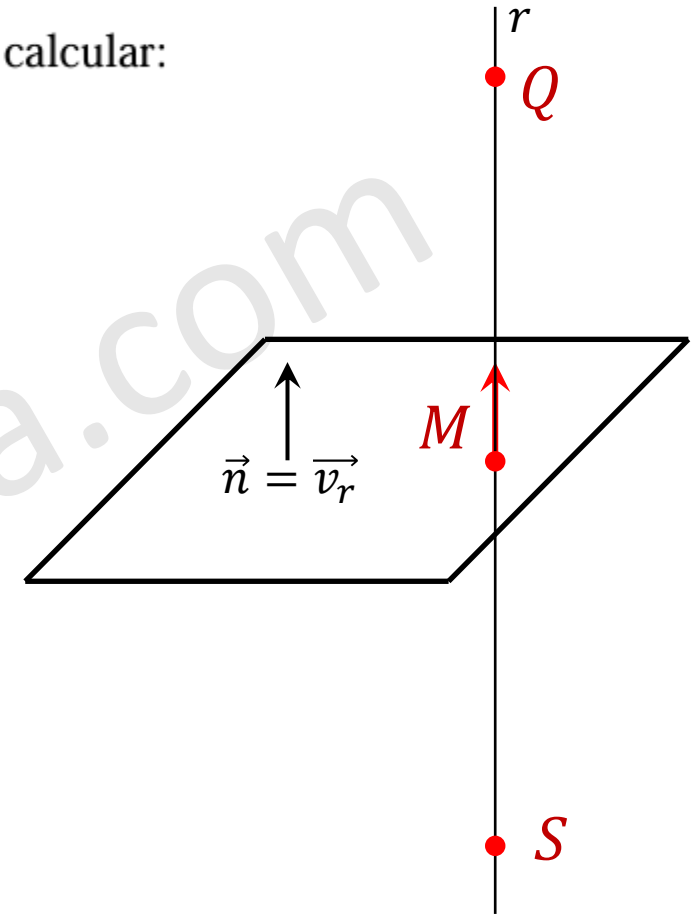
4) Se calcula el punto simétrico de Q respecto de π .

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS} \rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ}$$

Se sustituye, teniendo en cuenta que las coordenadas de los vectores coinciden con las componentes de los puntos.

$$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11} \right) - (1,1,1) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right)$$

El punto simétrico de Q respecto al plano π es: $\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right)$





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 4.1



Ejercicio 4.1

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Dado que $f(x)$ está definida en $\mathbb{R}$, **no posee asíntotas verticales**.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Por consiguiente $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$. No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Se calcula la derivada. $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Se iguala la derivada a cero: $\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 1}{((-2)^2 + 1)^2} < 0$ $f'(0) = \frac{-0^2 + 1}{(0^2 + 1)^2} > 0$ $f'(2) = \frac{-2^2 + 1}{(2^2 + 1)^2} < 0$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

$f(x)$ **decrece** en $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ **crece** en $x \in (-1, 1)$

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

A partir del estudio de signos de la función derivada deducimos los máximos y mínimos relativos.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

En $x = -1$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$

En $x = 1$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$

Mínimo relativo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

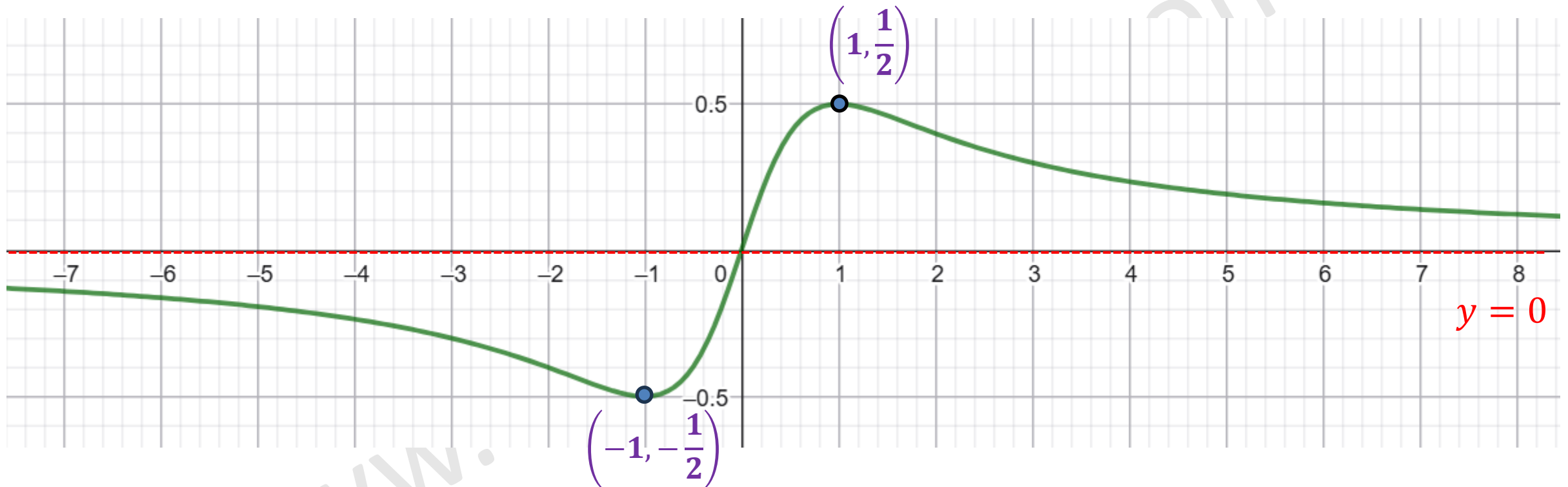
Máximo relativo en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Puesto que anteriormente hemos demostrado que los límites en los infinitos tienden a cero, podemos afirmar que el máximo y el mínimo relativo son también absolutos.

Mínimo relativo y absoluto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

Máximo relativo y absoluto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f . $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$



Para hacer la representación gráfica, te recomiendo que obtengas el punto de corte con el eje Y. En este caso es el (0,0). Te ayudará a representar mejor la función.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad y \quad g(x) = 8x$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 4.2



Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ **$Dom f(x) = \mathbb{R}/\{0\}$**

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases},$$

luego **$x = 0$ es A.V. de $f(x)$**

Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Por consiguiente, $y = 0$ es asíntota horizontal **de** $f(x)$.
No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Se observa que $f'(x) < 0$ si $x > 0$, por lo que:

$f(x)$ **decrece** en $x \in (0, +\infty)$

Se observa que $f'(x) > 0$ si $x < 0$, por lo que:

$f(x)$ **crece** en $x \in (-\infty, 0)$

Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

Para obtener la representación gráfica de ambas funciones basta con dar valores a x .

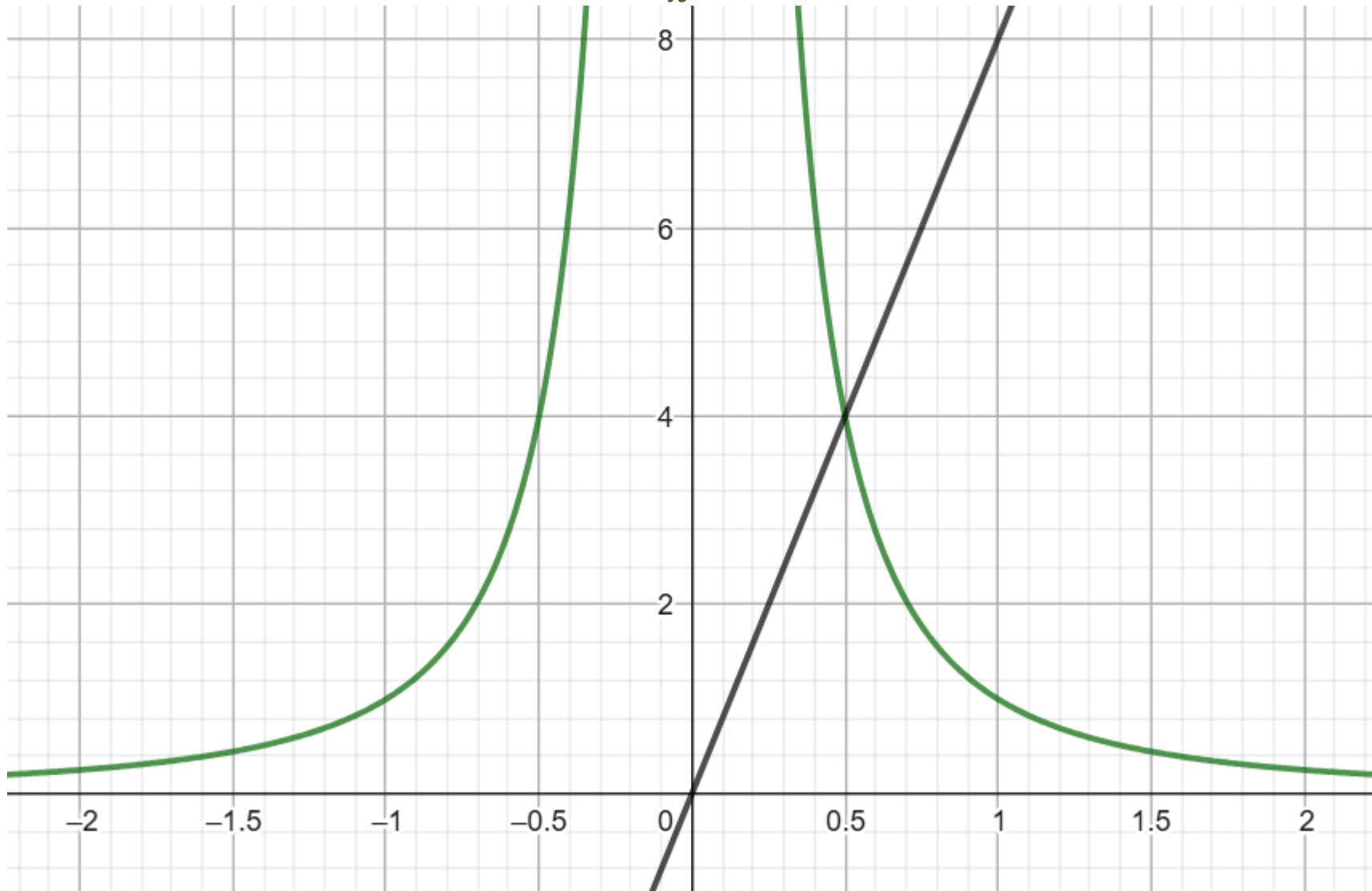
x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$

x	$g(x) = 8x$
0	0
$\frac{1}{2}$	4
1	8

Para que se vean bien las gráficas, las represento en la siguiente diapositiva.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

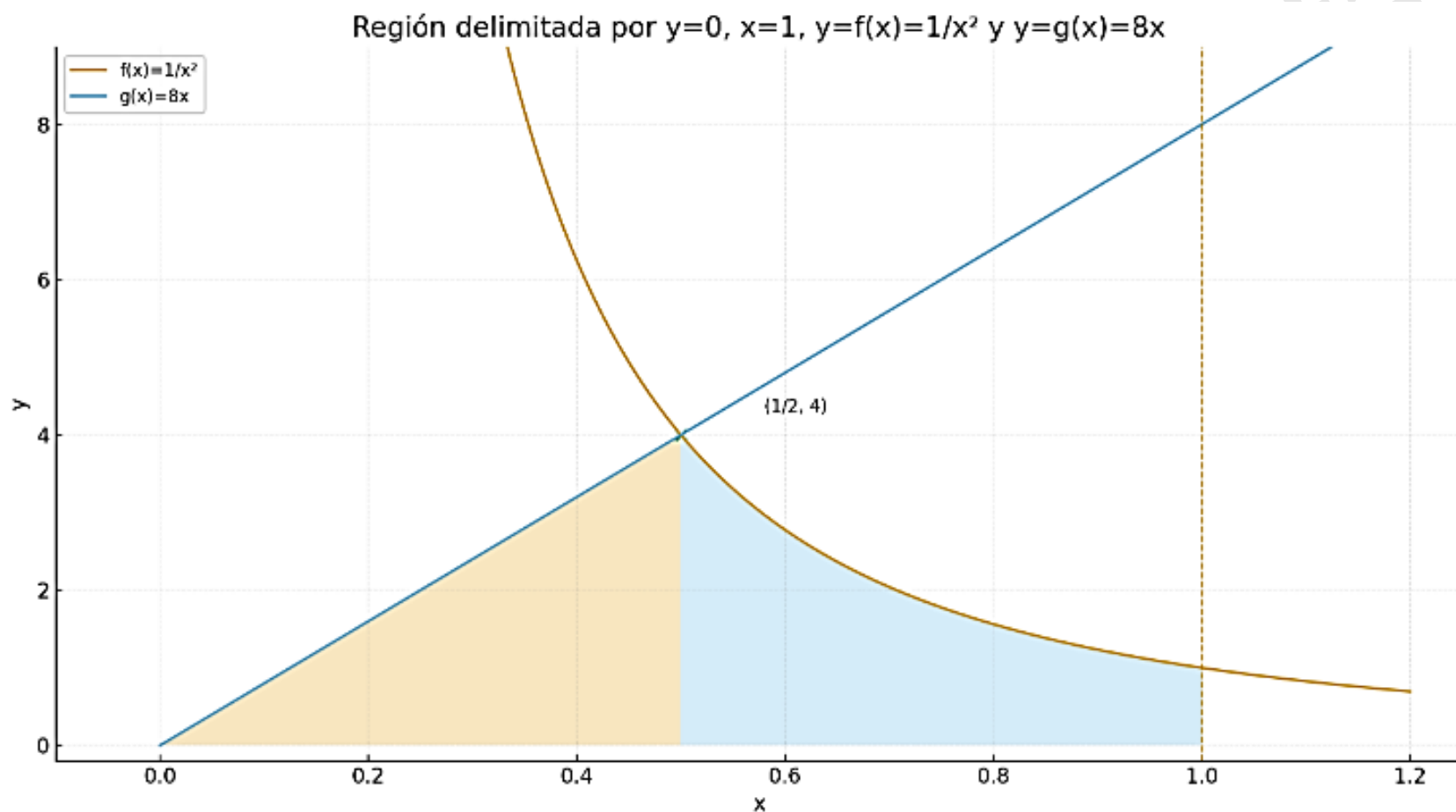
$$g(x) = 8x$$



4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Se calcula el punto de corte entre ambas funciones. $\frac{1}{x^2} = 8x \rightarrow 1 = 8x^3 \rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$



4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

En la gráfica se observa el recinto delimitado. Su área se calcula mediante dos integrales.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 8x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx = [4x^2]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 4 \cdot 0^2 \right) + \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \right) = 1 + 1 = 2$$

El área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ **es 2 unidades de área.**