



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

www.angelcuesta.com

JULIO 2025 - PROBLEMA 2.1



Ejercicio 2.1

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

Se despeja la matriz X utilizando las propiedades de las matrices.

$$(A^{-1} \cdot X)^{-1} = A \cdot (B^2 \cdot A)^{-1} \xrightarrow{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}} X^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot (B^2)^{-1}$$

$$X^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot (B^2)^{-1} \xrightarrow[\begin{matrix} A \cdot A^{-1} = I \\ (A^{-1})^{-1} = A \end{matrix}]{\hspace{1cm}} X^{-1} \cdot A = I \cdot (B^2)^{-1} \longrightarrow X^{-1} \cdot A = (B^2)^{-1}$$

Se multiplica por la inversa de A en ambos lados de la igualdad.

$$X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1} \longrightarrow X^{-1} \cdot I = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1} \xrightarrow{B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}} X^{-1} = (A \cdot B^2)^{-1}$$

$$X^{-1} = (A \cdot B^2)^{-1} \longrightarrow X = A \cdot B^2$$

Se calcula X en la siguiente diapositiva.

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$. $X = A \cdot B^2$

Se calcula B^2 . $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Se calcula X . $X = A \cdot B^2 = A \cdot I = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

Se calcula el determinante aplicando las propiedades de los determinantes.

$$|(3 \cdot A^5 \cdot B)^2| \xrightarrow{|A^n| = |A|^n} |3 \cdot A^5 \cdot B|^2 \xrightarrow{|k \cdot A| = k^m \cdot |A|} (3^2 \cdot |A^5 \cdot B|)^2 \longrightarrow 81 \cdot |A^5 \cdot B|^2$$

$$81 \cdot |A^5 \cdot B|^2 \xrightarrow{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|} 81 \cdot (|A^5| \cdot |B|)^2 \xrightarrow{|A^n| = |A|^n} 81 \cdot (|A|^5 \cdot |B|)^2$$

Se calculan los determinantes A y B . $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 1$ $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

Se calcula el valor del determinante pedido. $|(3 \cdot A^5 \cdot B)^2| = 81 \cdot (1^5 \cdot (-1))^2 = 81$

$$\boxed{|(3 \cdot A^5 \cdot B)^2| = 81}$$

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener:

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

Se recuerda que $B^2 = I$, por lo que $B^{100} = (B^2)^{50} = I^{50} = I$.

Por otro lado, $B^{99} = B^{2 \cdot 49 + 1} = (B^2)^{49} \cdot B = I^{49} \cdot B = B$.

De forma que la expresión inicial se transforma en esta otra: $a \cdot B^{100} + b \cdot B^{99} = A + C \longrightarrow a \cdot I + b \cdot B = A + C$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos sus términos a_{ij} . $\begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \\ 0=0 \\ a-b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

Los valores pedidos son: **$a = 1$ y $b = 0$.**