



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 2.2



Ejercicio 2.2

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}.$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

www.ange.

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a - 1$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $-a^2 - 2a - 1 = 0 \longrightarrow a = -1$

Si $a \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow[\text{3} \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo el valor de a en ambas matrices.

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $a = -1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\text{Si } a = -1 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A A

F_2	-1	-1	1	-1
F_1	1	1	-1	1
$F_2=F_2+F_1$	0	0	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A y A^* tienen, ambas, dos filas linealmente independientes. Para $a = -1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

F_3	-1	1	0	-1
F_1	1	1	-1	1
$F_3=3F_3-F_1$	0	2	-1	0

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado 2.2.1. Se aplica el teorema de Rouché para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -1$	2	2	3	S.C.I.	Infinito

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto para $a = -1$. Se aplica la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -a^2 - 2a - 1 = -(a + 1)^2$ **OJO A LA FACTORIZACIÓN**

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a^2 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-a \cdot (a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a^2 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-a \cdot (a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-2a^2 - 2a}{-(a+1)^2} = \frac{-2a \cdot (a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{2a}{a+1}$$

La solución del sistema si $a \neq -1$ es:

$$x = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{a}{a+1}$$

$$z = \frac{2a}{a+1}$$

BONUS

Para resolver el sistema de ecuaciones para $a = -1$ utilizaremos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior.

Asigno un parámetro a una de las incógnitas. En este caso $y = \lambda$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \lambda - z = 1 \\ 2\lambda - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + z - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

La solución del sistema si $a = -1$ es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$