



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 3x + y - z = 2$$

$$P = (0, 1, -1) \text{ y } Q = (1, a, 1)$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 3.2



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

La recta que pasa por P y Q estará contenida en el plano π cuando ambos puntos pertenezcan a dicho plano.

Se sustituyen las coordenadas de los puntos en la ecuación del plano.

$$P = (0, 1, -1) \longrightarrow 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2 \longrightarrow 2 = 2 \quad \text{Por lo tanto, } P \text{ pertenece a } \pi.$$

$$Q = (1, a, 1) \longrightarrow 3 \cdot 1 + a - 1 = 2 \longrightarrow a = 0 \quad \text{Por lo tanto, } a = 0 \text{ para que } Q \text{ esté contenido en } \pi.$$

Si $a = 0$ la recta que pasa por los puntos P y Q estará incluida en el plano π .

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0,1,-1)$ y $Q = (1,a,1)$, calcular:

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

Se sustituye el valor de a en Q . $Q = (1, 1, 1)$

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar perpendicular al plano que pase por Q .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto Q . $\vec{v}_r = \vec{n} = (3,1,-1)$ $Q = (1,1,1)$

2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán. $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

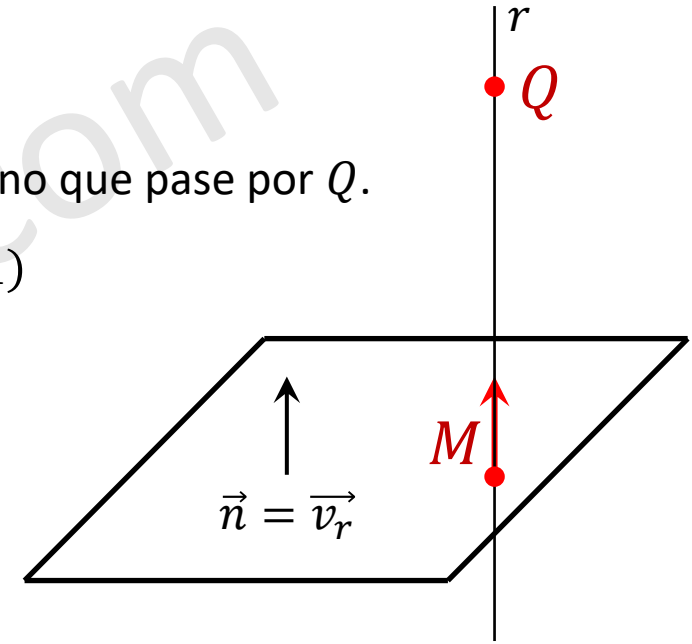
3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. M

Se sustituye r en π :

$$3x + y - z = 2 \rightarrow 3 \cdot (1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2 \rightarrow 11\lambda = -1 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{11}$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = \frac{-1}{11}$ en r . $M: \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \frac{-1}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 + \frac{-1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 - \frac{-1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases}$

$$M = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11} \right)$$



3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0,1,-1)$ y $Q = (1,a,1)$, calcular:

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

4) Se calcula el punto simétrico de Q respecto de π .

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS} \rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ}$$

Se sustituye, teniendo en cuenta que las coordenadas de los vectores coinciden con las componentes de los puntos.

$$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11} \right) - (1,1,1) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right)$$

El punto simétrico de Q respecto al plano π es: $\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right)$

