



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 4.1



Ejercicio 4.1

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

se pide:

4.1.1 **(0.5 puntos)** Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 **(1.5 puntos)** Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 **(0.5 puntos)** Representar la función f .

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Dado que $f(x)$ está definida en $\mathbb{R}$, **no posee asíntotas verticales.**

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Por consiguiente $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$. No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Se iguala la derivada a cero.
$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

Se estudia el signo de la derivada.
$$f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 1}{((-2)^2 + 1)^2} < 0 \quad f'(0) = \frac{-0^2 + 1}{(0^2 + 1)^2} > 0 \quad f'(2) = \frac{-2^2 + 1}{(2^2 + 1)^2} < 0$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

$f(x)$ **decrece** en $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ **crece** en $x \in (-1, 1)$

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

A partir del estudio de signos de la función derivada deducimos los máximos y mínimos relativos.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

En $x = -1$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$

En $x = 1$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$

Mínimo relativo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

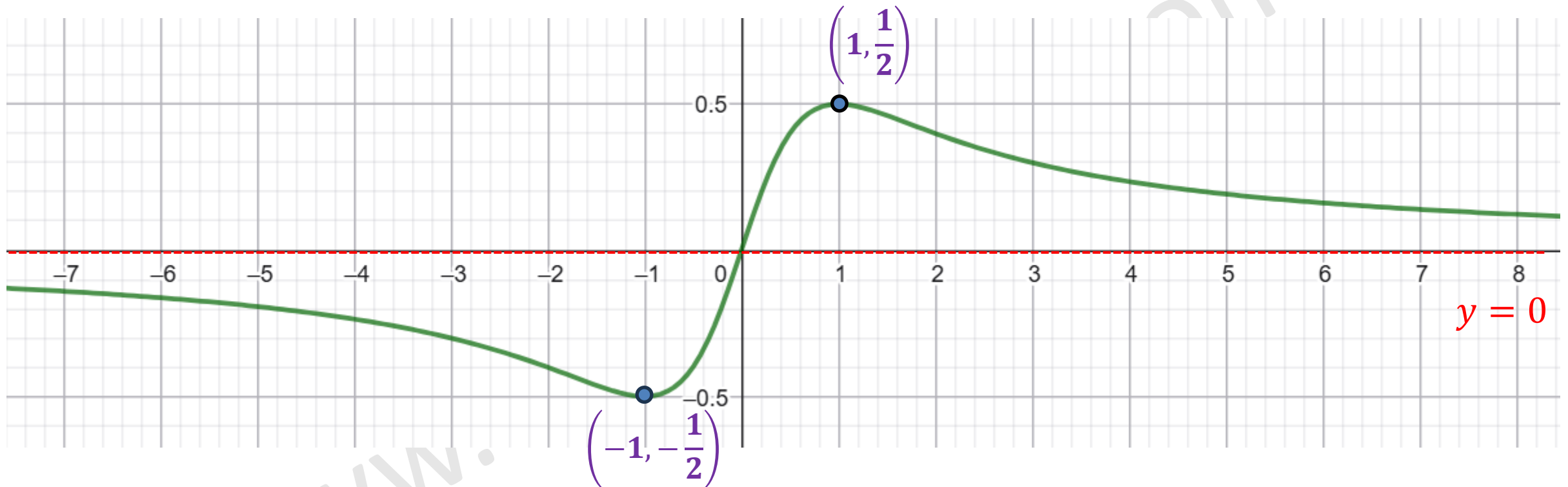
Máximo relativo en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Puesto que anteriormente hemos demostrado que los límites en los infinitos tienden a cero, podemos afirmar que el máximo y el mínimo relativo son también absolutos.

Mínimo relativo y absoluto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

Máximo relativo y absoluto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f . $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$



Para hacer la representación gráfica, te recomiendo que obtengas el punto de corte con el eje Y. En este caso es el (0,0). Te ayudará a representar mejor la función.