



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad y \quad g(x) = 8x$$

JULIO 2025 - PROBLEMA 4.2



Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ **$Dom f(x) = \mathbb{R}/\{0\}$**

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases},$$

luego **$x = 0$ es A.V. de $f(x)$**

Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Por consiguiente, $y = 0$ es asíntota horizontal **de** $f(x)$.
No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Se observa que $f'(x) < 0$ si $x > 0$, por lo que:

$f(x)$ **decrece** en $x \in (0, +\infty)$

Se observa que $f'(x) > 0$ si $x < 0$, por lo que:

$f(x)$ **crece** en $x \in (-\infty, 0)$

Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

Para obtener la representación gráfica de ambas funciones basta con dar valores a x .

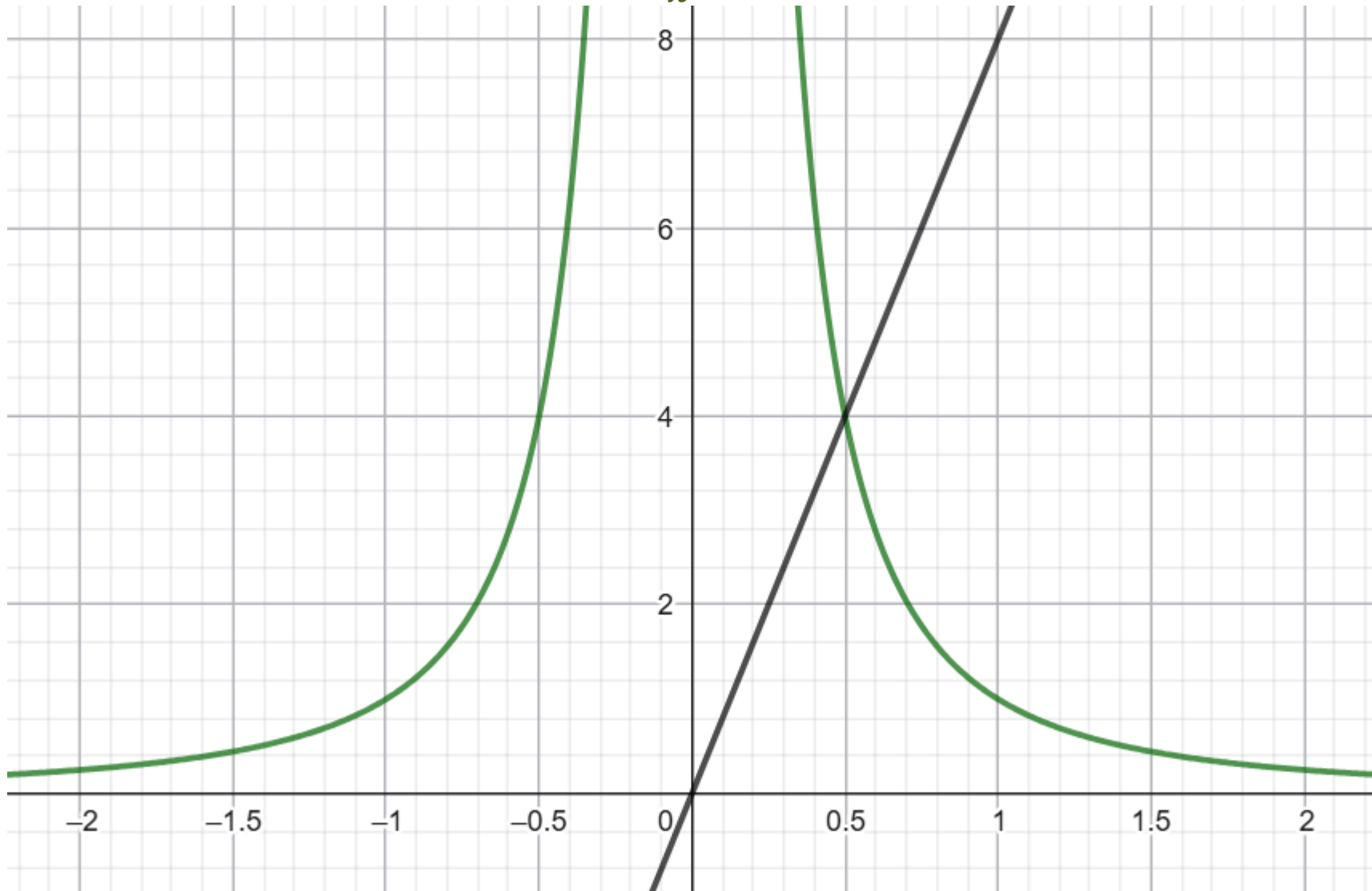
x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$

x	$g(x) = 8x$
0	0
$\frac{1}{2}$	4
1	8

Para que se vean bien las gráficas, las represento en la siguiente diapositiva.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

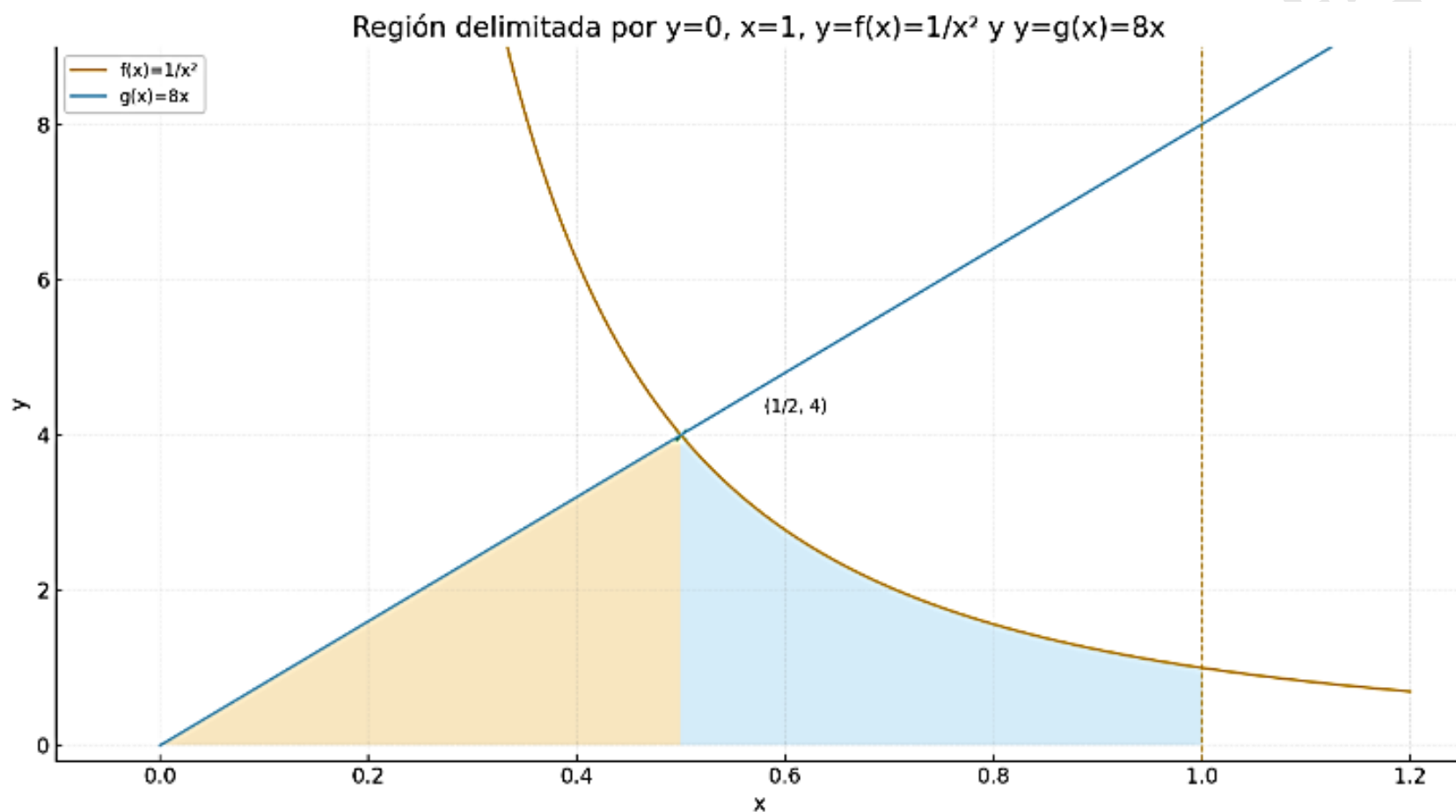
$$g(x) = 8x$$



4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Se calcula el punto de corte entre ambas funciones. $\frac{1}{x^2} = 8x \rightarrow 1 = 8x^3 \rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$



4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

En la gráfica se observa el recinto delimitado. Su área se calcula mediante dos integrales.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 8x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx = [4x^2]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 4 \cdot 0^2 \right) + \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \right) = 1 + 1 = 2$$

El área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ **es 2 unidades de área.**