



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

**PROBABILIDAD
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 1



PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Se ha realizado una encuesta a 120 miembros de un club de lectura sobre sus preferencias literarias. La siguiente tabla muestra los resultados clasificados por edad y tipo de obra preferido.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 – 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?
- 1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que un miembro del club **NO** tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?
- 1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 – 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

47

35

28

Solución:

Se calcula el número de personas que prefiere obras que no sean ensayos. Se muestra el total sobre la tabla de contingencia del enunciado. Se recuerda que hay un total de 120 personas.

Se aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad pedida:

$$P = \frac{\text{Número de personas que no prefieren el ensayo}}{\text{Número total de personas}} = \frac{47 + 35 + 28}{120} = \frac{110}{120} = \frac{11}{12}$$

La probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo es **11/12**.

1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que un miembro del club **NO** tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos	
< 25 años	17	6	7	1	31
25 – 60 años	22	17	10	3	52
> 60 años	8	12	11	6	37
	47	35	28	10	TOTAL: 120

Solución:

Se completan las frecuencias marginales de la tabla de contingencia.

Se calcula la probabilidad condicionada pedida aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(EDAD \geq 25 / NO Poesía) = \frac{P(EDAD \geq 25 \cap NO Poesía)}{P(NO Poesía)} = \frac{\frac{22 + 8 + 10 + 11 + 3 + 6}{120}}{\frac{47 + 28 + 10}{120}} = \frac{60}{85} = \frac{12}{17}$$

Si se sabe que un miembro del club **NO** tiene como tipo de obra preferido la poesía, la probabilidad de que tenga 25 años o más es **12/17**.

1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos	
< 25 años	17	6	7	1	31
25 – 60 años	22	17	10	3	52
> 60 años	8	12	11	6	37
	47	35	28	10	TOTAL: 120

Solución:

Se calcula la probabilidad de que un miembro del club que tiene entre 25 y 60 años tenga como tipo de obra preferido, o bien las obras de teatro, o bien los ensayos.

$$P(\text{Obras de teatro o ensayos} / 25 - 60) = \frac{P(\text{Obras de teatro o ensayos} \cap 25 - 60)}{P(25 - 60)} = \frac{\frac{10 + 3}{52}}{\frac{52}{120}} = \frac{13}{52} = 0,25$$

La probabilidad calculada es la probabilidad de éxito que utilizaremos a continuación.

1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

Solución: Sea X el número de miembros del club que tiene entre 25 y 60 años y que tiene como tipo de obra preferido, o bien las obras de teatro, o bien los ensayos. **Se supone que la probabilidad calculada permanece constante e independiente del número de personas extraídas del grupo.**

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 10; p = 0,25; q = 1 - p = 0,75 \quad X \sim Bi(10; 0,25)$

Se calcula la probabilidad pedida $P(X \leq 3)$ utilizando la tabla que se proporciona en el examen:

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770

$$P(X \leq 3) = 0,7759$$

La probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos es **0,7759 (77,59 %)**.

1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 10; p = 0,25; q = 1 - p = 0,75$ $X \sim Bi(10; 0,25)$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10} = 0,0563$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^9 = 0,1877$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^8 = 0,2816$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^7 = 0,2503$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X \leq 3) = 0,0563 + 0,1877 + 0,2816 + 0,2503 = 0,7759$$

La probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos es **0,7759 (77,59 %)**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 2.1



Ejercicio 2.1

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

Se despeja la matriz X utilizando las propiedades de las matrices.

$$2 \cdot A \cdot X = B \cdot X + I \longrightarrow 2 \cdot A \cdot X - B \cdot X = I \longrightarrow (2 \cdot A - B) \cdot X = I \xrightarrow{A^{-1} \cdot A = I} X = (2 \cdot A - B)^{-1}$$

Se calcula el valor de X calculando la matriz inversa de $2 \cdot A - B$.

$$2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

Se calcula la matriz inversa de $2 \cdot A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos.

Se calcula el valor del determinante: $|2 \cdot A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = 3 \neq 0$ La matriz tiene inversa.

Se calcula la matriz de los adjuntos: $Adj(2 \cdot A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Se calcula la matriz traspuesta: $(Adj(2 \cdot A - B))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se calcula la matriz inversa, que es igual al valor de X :

$$X = (2 \cdot A - B)^{-1} = \frac{1}{|2 \cdot A - B|} \cdot (Adj(2 \cdot A - B))^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.1

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.2 **(0.75 puntos)** Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

Se calcula la matriz A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot I$$

Se sustituye A^2 en la ecuación dada: $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot I + \alpha \cdot A - I = 0 \longrightarrow I + \alpha \cdot A - I = 0 \longrightarrow \alpha \cdot A = 0$

$$\alpha \cdot A = 0 \xrightarrow{\text{Como } A \neq 0} \alpha = 0$$

$\alpha = 0$

Ejercicio 2.1

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

Anteriormente ya se calculó A^2 : $A^2 = \frac{1}{4} \cdot I$

Se expresa A^{12} en función de A^2 :

$$A^{12} = A^{2 \cdot 6} = (A^2)^6 = \left(\frac{1}{4} \cdot I\right)^6 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot I = \frac{1}{4096} \cdot I = \frac{1}{4096} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 2.2



Ejercicio 2.2

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases},$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -a \\ 1 + a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1 - a \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6a + 6$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $-6a + 6 = 0 \longrightarrow a = 1$

Si $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3$ $\xrightarrow[\text{3} \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3}$ $\text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = 1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo el valor de a en ambas matrices.

Ejercicio 2.2

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $a = 1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Si $a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}]{\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$3F_2$	6	6	3	3
$-2F_1$	-6	-2	-4	0
$F_2=3F_2-2F_1$	0	4	-1	3

F_3	0	-4	1	0
F_2	0	4	-1	3
$F_3=F_3+F_2$	0	0	0	3

$3F_3$	3	-3	3	0
$-F_1$	-3	-1	-2	0
$F_3=3F_3-F_1$	0	-4	1	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que,
Para $a = 1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$.**

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado 2.2.1. Se aplica el teorema de Rouché para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq 1$	3	3	3	Sistema compatible determinado	Única
Si $a = 1$	2	3	3	Sistema incompatible	Sin solución

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto para $a = 1$. Se aplica la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -6a + 6$

La solución del sistema si $a \neq 1$ es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6a+6} = \frac{-3a}{-6 \cdot (a-1)} = \frac{a}{2 \cdot (a-1)} = \frac{a}{2a-2}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-a & 0 \\ 1+a & a & 1 \\ a & 1-a & a-1 \end{vmatrix}}{-6a+6} = \frac{-4a^2+7a-2}{-6 \cdot (a-1)} = \frac{4a^2-7a+2}{6a-6}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1-a \\ 1+a & 2 & a \\ 1 & -1 & 1-a \end{vmatrix}}{-6a+6} = \frac{5a^2-5a+4}{-6 \cdot (a-1)} = \frac{-5a^2+5a-4}{6a-6}$$

$$x = \frac{a}{2a-2}$$

$$y = \frac{4a^2-7a+2}{6a-6}$$

$$z = \frac{-5a^2+5a-4}{6a-6}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 2x - z = 1$$

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$$

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 3.1



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



3.1 Dado el plano $\pi: 2x - z = 1$, calcular:

3.1.1 (1.25 puntos) Si existe, el plano perpendicular a π que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P = (0,1,2)$ es 2.

El vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (2, 0, -1)$.

Expreso la recta r en forma paramétrica: $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow r: \begin{cases} O = (0, 0, 0) \\ \vec{v} = (1, 2, 2) \end{cases}$

Si σ es un plano perpendicular a π , entonces su normal $\vec{n}_\sigma$ debe verificar que: $\vec{n}_\sigma \cdot \vec{n}_\pi = 0$

Además, como σ contiene a r , su normal es perpendicular al vector de la recta: $\vec{n}_\sigma \cdot \vec{v} = 0$

Un vector que es simultáneamente ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{n}_\pi$ es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{n}_\sigma = \vec{v} \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k} = (-2, 5, -4) \equiv (2, -5, 4)$$

Se toma un punto $O = (0, 0, 0)$ de r y con el vector normal de σ se calcula la ecuación del plano pedida.

$$2 \cdot (x - 0) - 5 \cdot (y - 0) + 4 \cdot (z - 0) = 0 \rightarrow \sigma: 2x - 5y + 4z = 0$$

La ecuación del plano es: $\sigma: 2x - 5y + 4z = 0$

Ejercicio 3.1

3.1 Dado el plano $\pi: 2x - z = 1$, calcular:

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P = (0,1,2)$ es 2.

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

El haz de planos paralelos a π tiene por ecuación: $\pi: 2x - z + C = 0$

$$d_{P-\pi} = \frac{|2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + C|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = 2 \longrightarrow |C - 2| = 2 \cdot \sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} C - 2 = 2 \cdot \sqrt{5} \\ C - 2 = -2 \cdot \sqrt{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C = 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \\ C = -2 \cdot \sqrt{5} + 2 \end{cases}$$

Las ecuaciones de los planos son: $\sigma_1: 2x - z + 2 \cdot \sqrt{5} + 2 = 0$

$\sigma_2: 2x - z - 2 \cdot \sqrt{5} + 2 = 0$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 2x + 3y - z = 0$$

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 3.2



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C .

El triángulo ABC pertenecerá al plano, si lo hacen de forma individual los puntos A, B y C .

Se sustituyen las coordenadas de los puntos en la ecuación del plano.

$$A = (0,0,0) \longrightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0 \longrightarrow 0 = 0 \quad \text{Por lo tanto, } A \text{ pertenece a } \pi.$$

$$B = (10,0,-20) \longrightarrow 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0 \longrightarrow 40 \neq 0 \quad \text{Por lo tanto, } B \text{ no pertenece a } \pi.$$

$$C = (0,15,-30) \longrightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 15 - (-30) = 0 \longrightarrow 75 \neq 0 \quad \text{Por lo tanto, } C \text{ no pertenece a } \pi.$$

El triángulo ABC **NO pertenecerá** al plano, ya que los puntos B y C no pertenecen al plano π .

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{D-\pi} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 6 + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

La distancia del punto D al plano π es igual a $\frac{9}{\sqrt{14}}$ unidades de longitud.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C .

Se calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C

Calculo primero los dos vectores directores del plano:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (10,0,-20) - (0,0,0) = (10,0,-20)$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,15,-30) - (0,0,0) = (0,15,-30)$$

Calculo la ecuación general del plano mediante determinantes.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 300x + 300y + 150z = 0 \longrightarrow 2x + 2y + z = 0$$

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C .

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar r perpendicular al plano que pase por D .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto D . $\vec{v}_r = \vec{n} = (2,2,1)$ $D = (1,2,-1)$

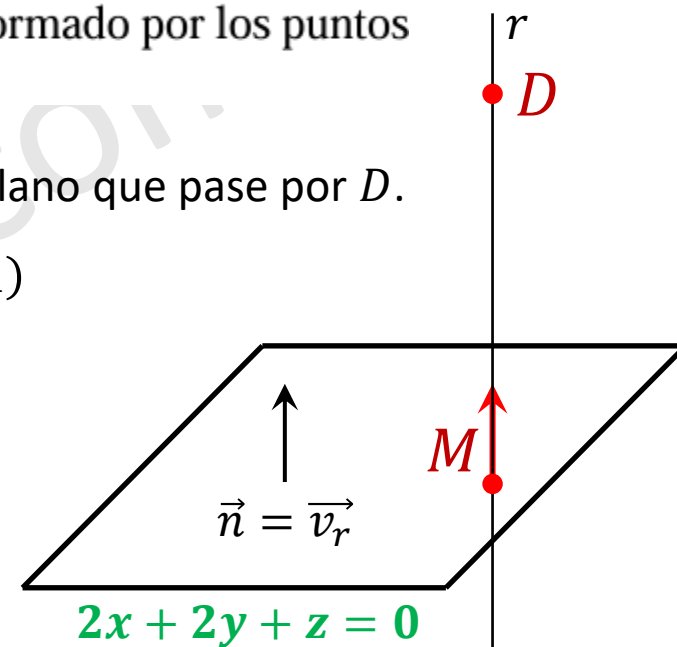
2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán. $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. M

Se sustituye r en σ : $2x + 2y + z = 0$:

$$2x + 2y + z = 0 \rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) + 2 \cdot (2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \rightarrow 9\lambda = -5 \rightarrow \lambda = \frac{-5}{9}$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = \frac{-5}{9}$ en r . $M: \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \frac{-5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases}$



El punto pedido es: $\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$$



JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 4.1

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $9 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} / \{-3, 3\}$$

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, $x = \pm 3$, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases},$$

luego $x = -3$ es A.V. de $f(x)$

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Calculo el límite de la función en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{0} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases},$$

luego $x = 3$ es A.V. de $f(x)$

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por consiguiente $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$. No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (9 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{9 - x^2 + 2x^2}{(9 - x^2)^2} = \frac{9 + x^2}{(9 - x^2)^2}$$

Igualo la derivada a cero:
$$\frac{9 + x^2}{(9 - x^2)^2} = 0 \rightarrow 9 + x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

Se estudia el signo de la derivada.
$$f'(-4) = \frac{9 + (-4)^2}{(9 - (-4)^2)^2} > 0 \quad f'(0) = \frac{9 + 0^2}{(9 - 0^2)^2} > 0 \quad f'(4) = \frac{9 + 4^2}{(9 - 4^2)^2} > 0$$

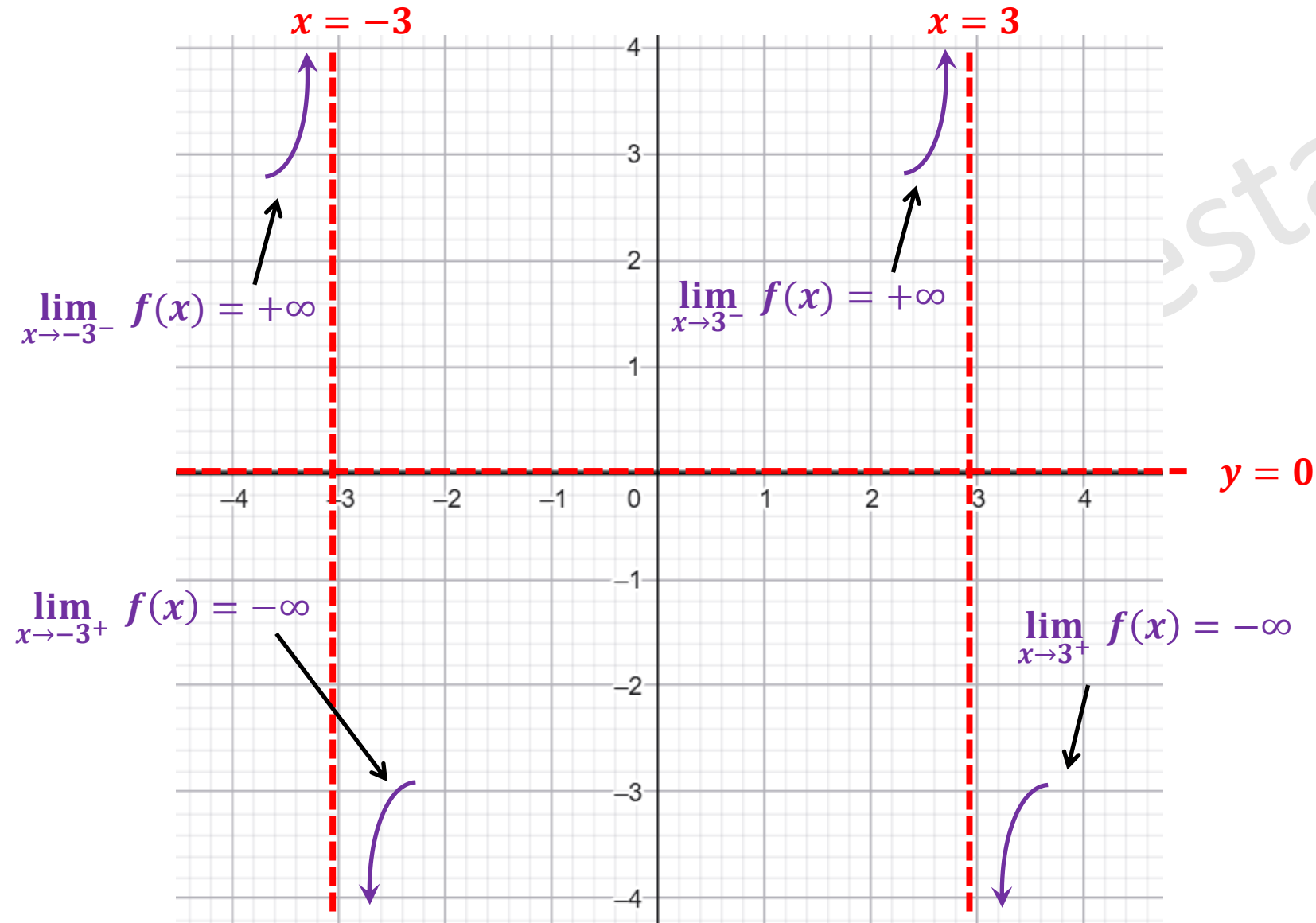
	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$				

$f(x)$ **crece** en $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

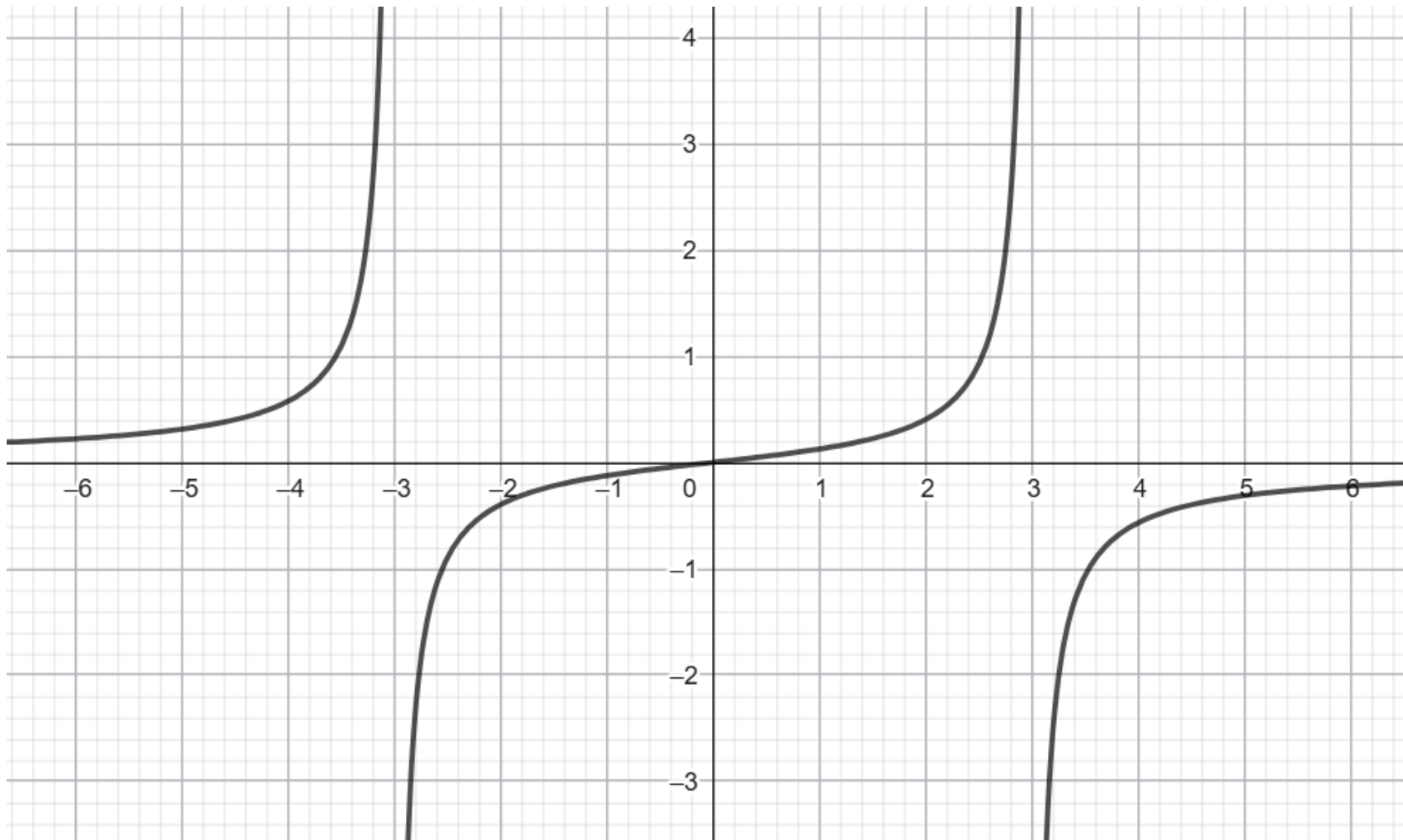
Se representa en primer lugar la posición de la curva respecto de las asíntotas verticales, nos ayudará a representar la curva más fácilmente.



4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

Para dibujar de forma correcta la función es conveniente indicar que el punto de corte con el eje X es $O = (0,0)$ y que la función no presenta ni máximos ni mínimos relativos.



Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

La integral propuesta es una integral casi inmediata. Basta con arreglarla un poco. De esta forma evitaremos tener que hacer un cambio de variable o integrarla como una función racional.

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{-2x}{9-x^2} \right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln|9-x^2| + C \quad \text{Recuerda que: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

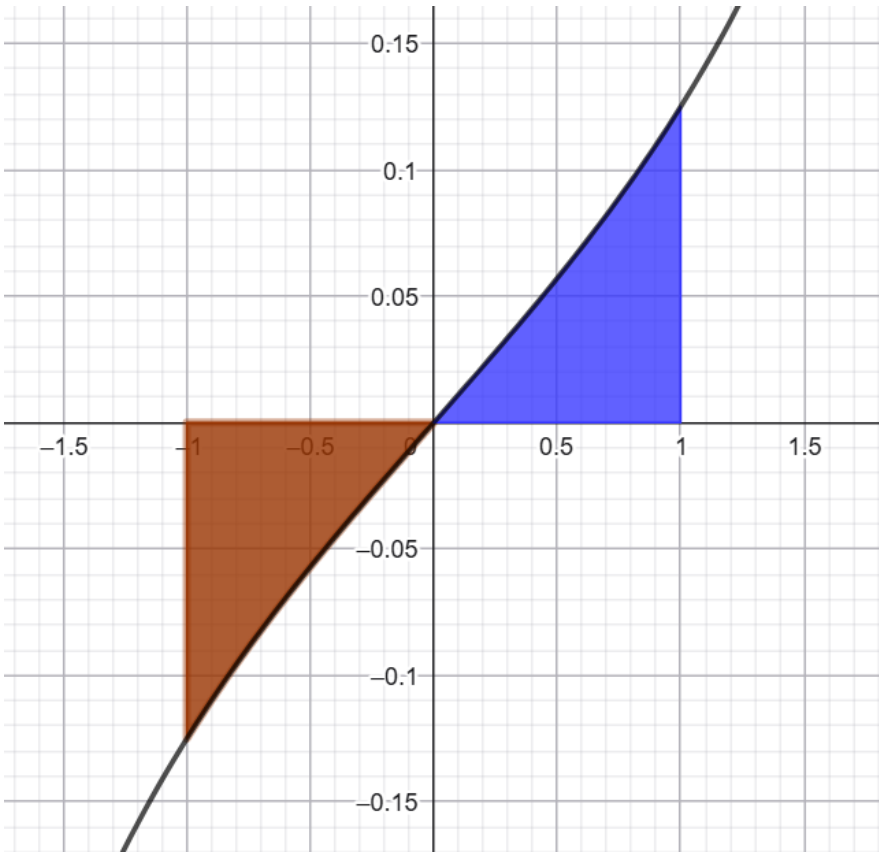
$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln|9-x^2| + C \quad \forall x \in \text{Dom } f(x)$$

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

Se muestra en la imagen las dos áreas que debemos calcular.



Demostraré que la función es impar. Ello me permitirá afirmar que el área comprendida en el primer tramo y en el segundo son iguales. Y de esta forma, podré calcular el área pedida con una sola integral

Una función es impar cuando: $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \quad f(-x) = \frac{-x}{9-(-x)^2} = -\frac{x}{9-x^2} = -f(x)$$

Por lo tanto, $f(x) = -f(-x)$, y, **$f(x)$ es impar $\forall x \in \text{Dom } f(x)$**

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

De forma que podemos decir que: $A = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx$

Calculo dicha integral, aplicado la regla de Barrow.

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \ln(9-x^2) \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln(9-1^2) \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln(9-0^2) \right) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(8) + \frac{1}{2} \cdot \ln(9)$$

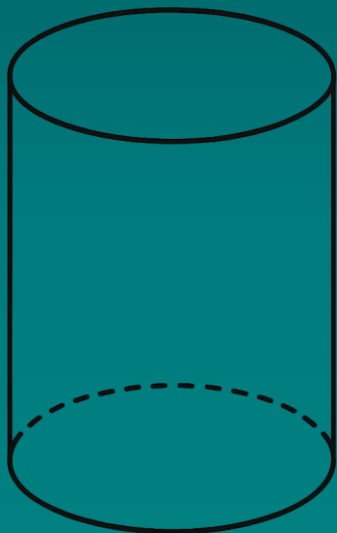
$$\int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

Por lo que el área pedida es: $A = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{9}{8} \right) = \ln \left(\frac{9}{8} \right)$

El área pedida es: $A = \ln \left(\frac{9}{8} \right) \text{ u. a}$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones



JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 4.2

Ejercicio 4.2

4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

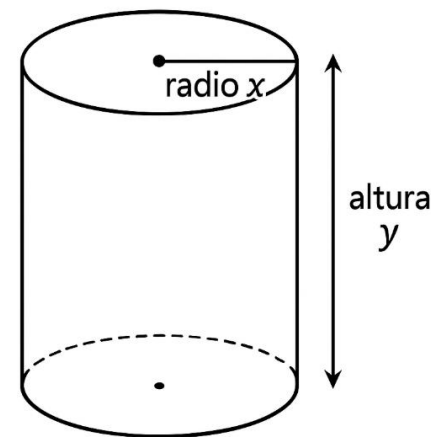
4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área.

Se definen las variables x e y . x es el radio del cilindro (cm) y es la altura del cilindro (cm)

El área total del bote sería: $f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$; *Dominio* $x > 0$; $y > 0$



Se escribe la ecuación definida por la restricción del problema. $V = \pi x^2 y = 33$

Se despeja y : $y = \frac{33}{\pi x^2}$

Y se sustituye en la función objetivo. $f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{33}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{66}{x}$

$$f(x) = 2\pi x^2 + \frac{66}{x}; \text{Dominio } x > 0$$

Para calcular el mínimo de la función se debe calcular la primera derivada.

Ejercicio 4.2

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote. $f(x) = 2\pi x^2 + \frac{66}{x}$

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{66}{x^2} \longrightarrow 4\pi x - \frac{66}{x^2} = 0 \longrightarrow 4\pi x = \frac{66}{x^2} \longrightarrow x^3 = \frac{66}{4\pi} \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 1,7382 \text{ cm}$$

Se debe comprobar que el valor obtenido minimiza el área total del bote. Para ello, utilizaré el criterio de la segunda derivada. También se puede hacer un estudio de signos de la derivada.

$$f''(x) = 4\pi + \frac{132}{x^3} \longrightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{132}{\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^3} > 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \quad \text{Minimiza la función.}$$

Se calcula el valor de y . $y = \frac{33}{\pi x^2} = \frac{33}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 3,4765 \text{ cm}$

Las dimensiones que minimizan el área total del bote son: $x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 1,7382 \text{ cm}$ $y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 3,4765 \text{ cm}$

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área. $\text{Área} = f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ $x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$ $y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$

Se sustituyen los valores obtenidos de x e y .

$$\text{Área} = f\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}, 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} = 6\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 \approx 56,9540 \text{ cm}^2$$

El área mínima del bote es: $A = 6\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 \approx 56,9540 \text{ cm}^2$