



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 2.1



Ejercicio 2.1

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

Se despeja la matriz X utilizando las propiedades de las matrices.

$$2 \cdot A \cdot X = B \cdot X + I \longrightarrow 2 \cdot A \cdot X - B \cdot X = I \longrightarrow (2 \cdot A - B) \cdot X = I \xrightarrow{A^{-1} \cdot A = I} X = (2 \cdot A - B)^{-1}$$

Se calcula el valor de X calculando la matriz inversa de $2 \cdot A - B$.

$$2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

Se calcula la matriz inversa de $2 \cdot A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos.

Se calcula el valor del determinante: $|2 \cdot A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = 3 \neq 0$ La matriz tiene inversa.

Se calcula la matriz de los adjuntos: $Adj(2 \cdot A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Se calcula la matriz traspuesta: $(Adj(2 \cdot A - B))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se calcula la matriz inversa, que es igual al valor de X :

$$X = (2 \cdot A - B)^{-1} = \frac{1}{|2 \cdot A - B|} \cdot (Adj(2 \cdot A - B))^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.1

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

Se calcula la matriz A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot I$$

Se sustituye A^2 en la ecuación dada: $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot I + \alpha \cdot A - I = 0 \longrightarrow I + \alpha \cdot A - I = 0 \longrightarrow \alpha \cdot A = 0$

$$\alpha \cdot A = 0 \xrightarrow{\text{Como } A \neq 0} \alpha = 0$$

$\alpha = 0$

Ejercicio 2.1

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

Anteriormente ya se calculó A^2 : $A^2 = \frac{1}{4} \cdot I$

Se expresa A^{12} en función de A^2 :

$$A^{12} = A^{2 \cdot 6} = (A^2)^6 = \left(\frac{1}{4} \cdot I\right)^6 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot I = \frac{1}{4096} \cdot I = \frac{1}{4096} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}$$