



**PAU - COMUNIDAD VALENCIANA**



# MATEMÁTICAS II

**Sistemas de ecuaciones**

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

**JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 2.2**



# Ejercicio 2.2

**2.2** Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases},$$

donde  $a$  es un parámetro real. Se pide:

**2.2.1 (1.25 puntos)** Discutir el sistema en función del parámetro  $a$ .

**2.2.2 (1.25 puntos)** Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

## Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro  $a$ .

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$   $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -a \\ 1 + a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1 - a \end{pmatrix}$

Calculo el rango de  $A$  en función de  $a$  mediante un determinante.  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6a + 6$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación.  $-6a + 6 = 0 \longrightarrow a = 1$

Si  $a \neq 1$  entonces  $|A| \neq 0$ ,  $\text{Ran}(A) = 3$   $\xrightarrow[\text{3} \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3}$   $\text{Ran}(A^*) = 3$

Si  $a = 1$  entonces  $|A| = 0$ ,  $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$  Debo calcular el rango de  $A$  y de  $A^*$  sustituyendo el valor de  $a$  en ambas matrices.

# Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro  $a$ .

Calcularé de forma simultánea el Rango de  $A$  y de  $A^*$  utilizando el método de Gauss para  $a = 1$ . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Si  $a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}]{\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$   $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

|                 |    |    |    |   |
|-----------------|----|----|----|---|
| $3F_2$          | 6  | 6  | 3  | 3 |
| $-2F_1$         | -6 | -2 | -4 | 0 |
| $F_2=3F_2-2F_1$ | 0  | 4  | -1 | 3 |

|               |   |    |    |   |
|---------------|---|----|----|---|
| $F_3$         | 0 | -4 | 1  | 0 |
| $F_2$         | 0 | 4  | -1 | 3 |
| $F_3=F_3+F_2$ | 0 | 0  | 0  | 3 |

|                |    |    |    |   |
|----------------|----|----|----|---|
| $3F_3$         | 3  | -3 | 3  | 0 |
| $-F_1$         | -3 | -1 | -2 | 0 |
| $F_3=3F_3-F_1$ | 0  | -4 | 1  | 0 |

Al finalizar el método de Gauss se observa que,  
Para  $a = 1$ ,  $\text{Ran}(A) = 2$  y  $\text{Ran}(A^*) = 3$ .

# Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro  $a$ .

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado 2.2.1. Se aplica el teorema de Rouché para definir el tipo de sistema.

|               | Ran(A) | Ran(A*) | Nº incógnitas | Tipo de Sistema                | Número de soluciones |
|---------------|--------|---------|---------------|--------------------------------|----------------------|
| Si $a \neq 1$ | 3      | 3       | 3             | Sistema compatible determinado | Única                |
| Si $a = 1$    | 2      | 3       | 3             | Sistema incompatible           | Sin solución         |

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto para  $a = 1$ . Se aplica la regla de Cramer.

Recordamos que:  $|A| = -6a + 6$

La solución del sistema si  $a \neq 1$  es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6a+6} = \frac{-3a}{-6 \cdot (a-1)} = \frac{a}{2 \cdot (a-1)} = \frac{a}{2a-2} \\ y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-a & 0 \\ 1+a & a & 1 \\ a & 1-a & a-1 \end{vmatrix}}{-6a+6} = \frac{-4a^2+7a-2}{-6 \cdot (a-1)} = \frac{4a^2-7a+2}{6a-6} \\ z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1-a \\ 1+a & 2 & a \\ 1 & -1 & 1-a \end{vmatrix}}{-6a+6} = \frac{5a^2-5a+4}{-6 \cdot (a-1)} = \frac{-5a^2+5a-4}{6a-6} \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{2a-2}$$

$$y = \frac{4a^2-7a+2}{6a-6}$$

$$z = \frac{-5a^2+5a-4}{6a-6}$$