



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 2x + 3y - z = 0$$

JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 3.2



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C .

El triángulo ABC pertenecerá al plano, si lo hacen de forma individual los puntos A, B y C .

Se sustituyen las coordenadas de los puntos en la ecuación del plano.

$$A = (0,0,0) \longrightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0 \longrightarrow 0 = 0 \quad \text{Por lo tanto, } A \text{ pertenece a } \pi.$$

$$B = (10,0,-20) \longrightarrow 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0 \longrightarrow 40 \neq 0 \quad \text{Por lo tanto, } B \text{ no pertenece a } \pi.$$

$$C = (0,15,-30) \longrightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 15 - (-30) = 0 \longrightarrow 75 \neq 0 \quad \text{Por lo tanto, } C \text{ no pertenece a } \pi.$$

El triángulo ABC **NO pertenecerá** al plano, ya que los puntos B y C no pertenecen al plano π .

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{D-\pi} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 6 + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

La distancia del punto D al plano π es igual a $\frac{9}{\sqrt{14}}$ unidades de longitud.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C .

Se calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C

Calculo primero los dos vectores directores del plano:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (10,0,-20) - (0,0,0) = (10,0,-20)$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,15,-30) - (0,0,0) = (0,15,-30)$$

Calculo la ecuación general del plano mediante determinantes.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 300x + 300y + 150z = 0 \longrightarrow 2x + 2y + z = 0$$

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C .

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar r perpendicular al plano que pase por D .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto D . $\vec{v}_r = \vec{n} = (2,2,1)$ $D = (1,2,-1)$

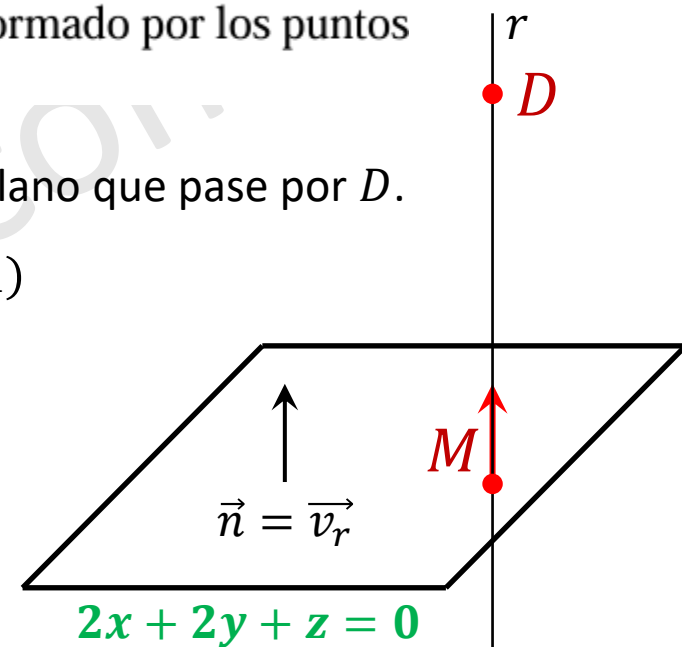
2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán. $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. M

Se sustituye r en σ : $2x + 2y + z = 0$:

$$2x + 2y + z = 0 \rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) + 2 \cdot (2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \rightarrow 9\lambda = -5 \rightarrow \lambda = \frac{-5}{9}$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = \frac{-5}{9}$ en r . $M: \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \frac{-5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases}$



El punto pedido es: $\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$