



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$$



JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 4.1

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $9 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} / \{-3, 3\}$$

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, $x = \pm 3$, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases},$$

luego $x = -3$ es A.V. de $f(x)$

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Calculo el límite de la función en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{0} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases},$$

luego $x = 3$ es A.V. de $f(x)$

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por consiguiente $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$. No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (9 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{9 - x^2 + 2x^2}{(9 - x^2)^2} = \frac{9 + x^2}{(9 - x^2)^2}$$

Igualo la derivada a cero:
$$\frac{9 + x^2}{(9 - x^2)^2} = 0 \rightarrow 9 + x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

Se estudia el signo de la derivada.
$$f'(-4) = \frac{9 + (-4)^2}{(9 - (-4)^2)^2} > 0 \quad f'(0) = \frac{9 + 0^2}{(9 - 0^2)^2} > 0 \quad f'(4) = \frac{9 + 4^2}{(9 - 4^2)^2} > 0$$

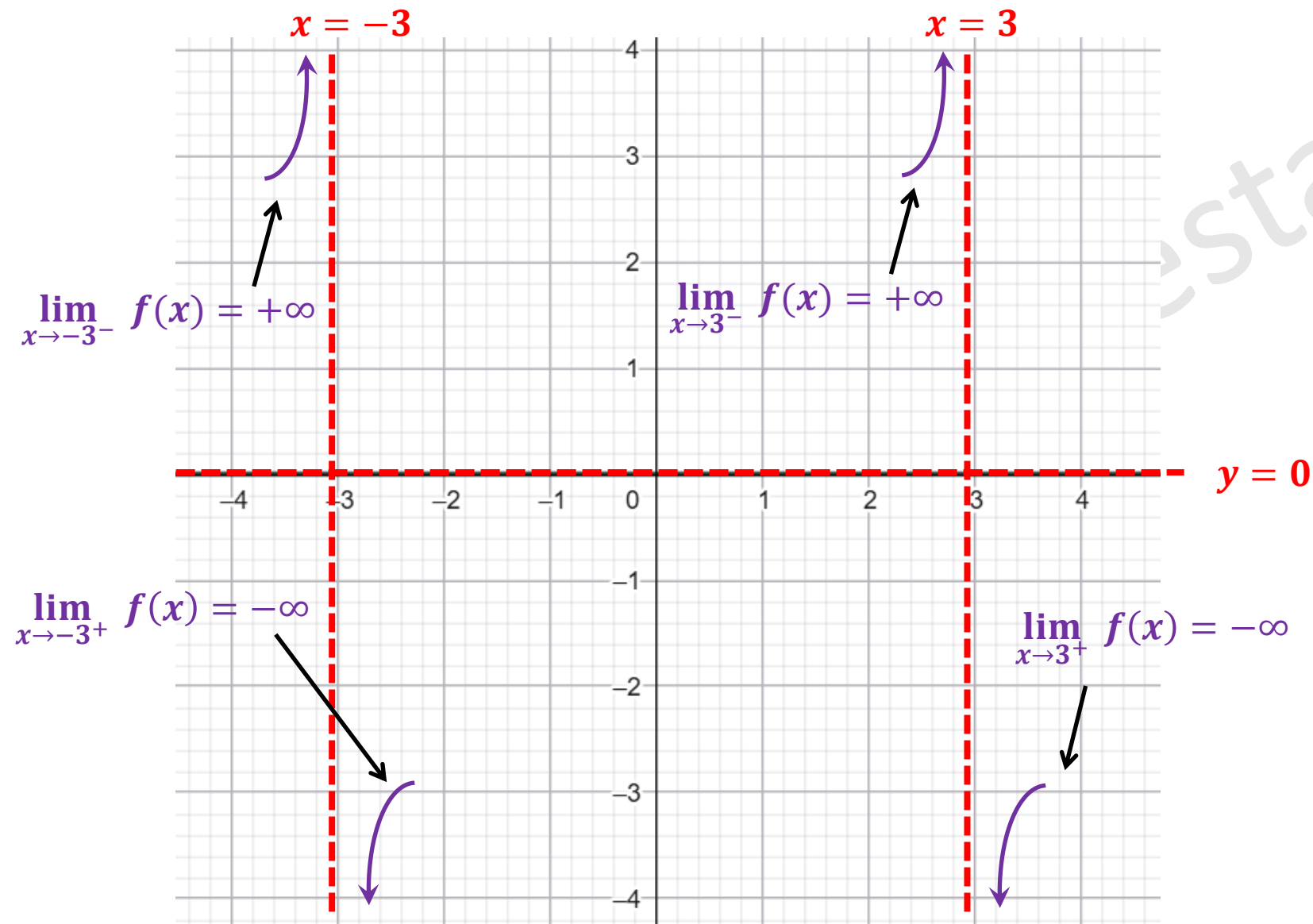
	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$				

$f(x)$ **crece** en $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

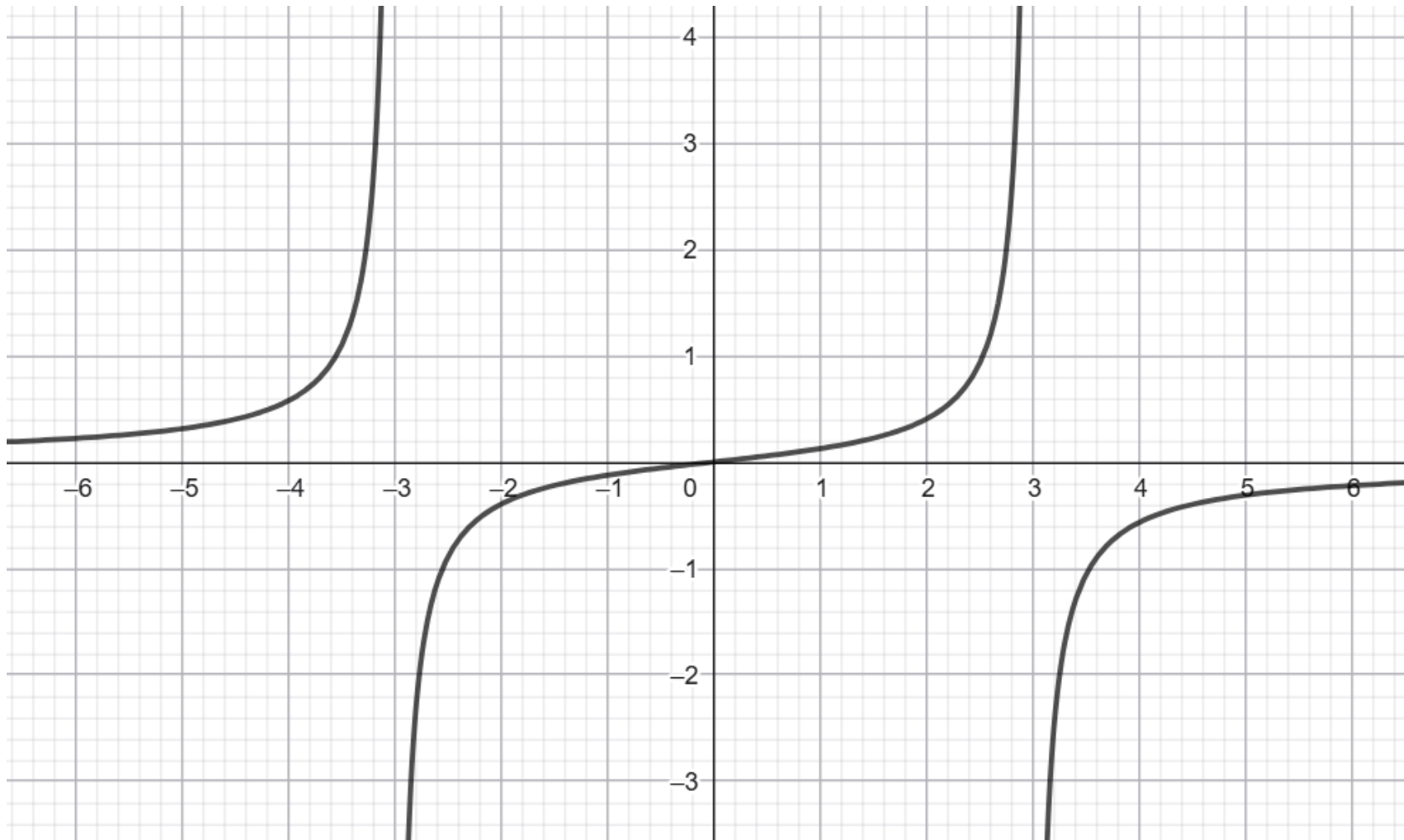
Se representa en primer lugar la posición de la curva respecto de las asíntotas verticales, nos ayudará a representar la curva más fácilmente.



4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

Para dibujar de forma correcta la función es conveniente indicar que el punto de corte con el eje X es $O = (0,0)$ y que la función no presenta ni máximos ni mínimos relativos.



Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

La integral propuesta es una integral casi inmediata. Basta con arreglarla un poco. De esta forma evitaremos tener que hacer un cambio de variable o integrarla como una función racional.

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{-2x}{9-x^2} \right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln|9-x^2| + C \quad \text{Recuerda que: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

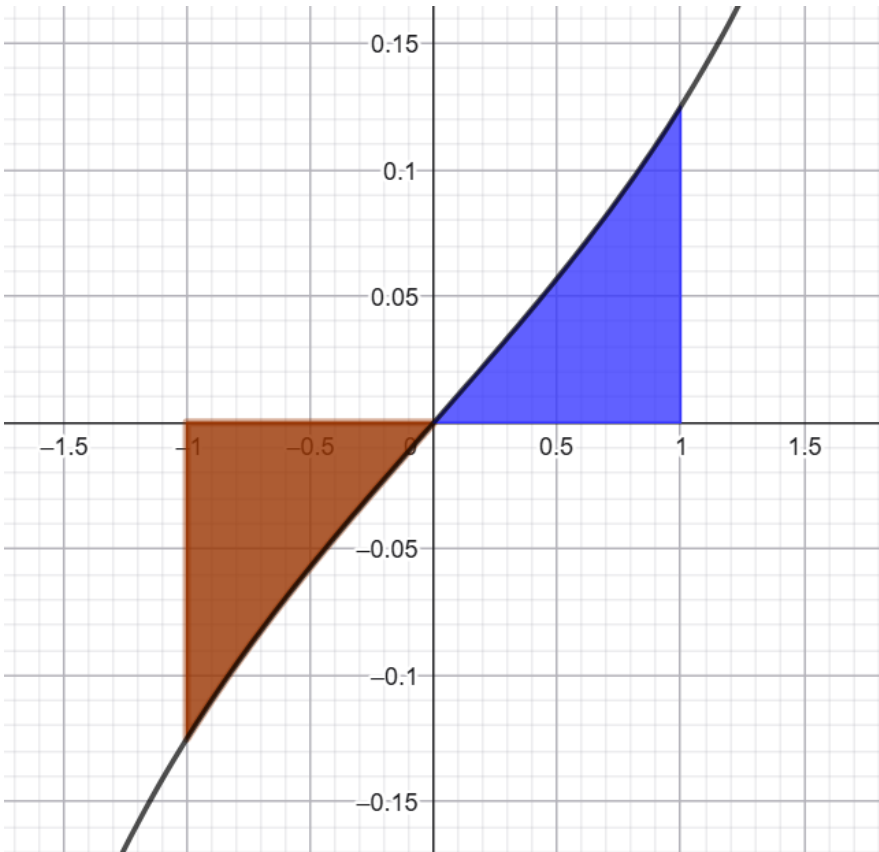
$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln|9-x^2| + C \quad \forall x \in \text{Dom } f(x)$$

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

Se muestra en la imagen las dos áreas que debemos calcular.



Demostraré que la función es impar. Ello me permitirá afirmar que el área comprendida en el primer tramo y en el segundo son iguales. Y de esta forma, podré calcular el área pedida con una sola integral

Una función es impar cuando: $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \quad f(-x) = \frac{-x}{9-(-x)^2} = -\frac{x}{9-x^2} = -f(x)$$

Por lo tanto, $f(x) = -f(-x)$, y, **$f(x)$ es impar $\forall x \in \text{Dom } f(x)$**

Ejercicio 4.1

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

De forma que podemos decir que: $A = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx$

Calculo dicha integral, aplicado la regla de Barrow.

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \ln(9-x^2) \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln(9-1^2) \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln(9-0^2) \right) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(8) + \frac{1}{2} \cdot \ln(9)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

Por lo que el área pedida es: $A = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x}{9-x^2} \right) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{9}{8} \right) = \ln \left(\frac{9}{8} \right)$

El área pedida es: $A = \ln \left(\frac{9}{8} \right) \text{ u. a}$