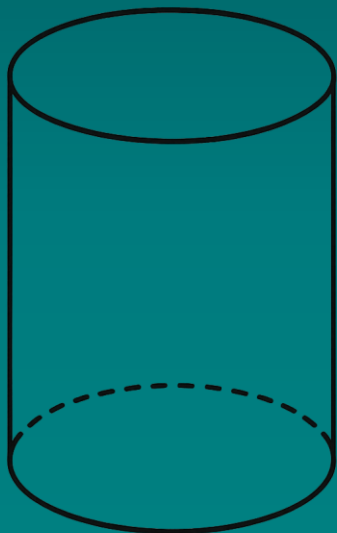




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones



JULIO 2025 RESERVA - PROBLEMA 4.2

Ejercicio 4.2

4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

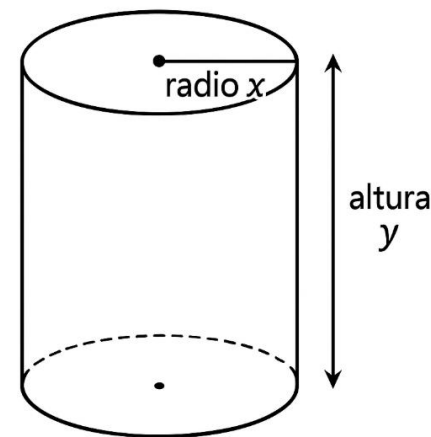
4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área.

Se definen las variables x e y . x es el radio del cilindro (cm) y es la altura del cilindro (cm)

El área total del bote sería: $f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$; *Dominio* $x > 0; y > 0$



Se escribe la ecuación definida por la restricción del problema. $V = \pi x^2 y = 33$

Se despeja y : $y = \frac{33}{\pi x^2}$

Y se sustituye en la función objetivo. $f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{33}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{66}{x}$

$$f(x) = 2\pi x^2 + \frac{66}{x}; \text{Dominio } x > 0$$

Para calcular el mínimo de la función se debe calcular la primera derivada.

Ejercicio 4.2

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote. $f(x) = 2\pi x^2 + \frac{66}{x}$

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{66}{x^2} \longrightarrow 4\pi x - \frac{66}{x^2} = 0 \longrightarrow 4\pi x = \frac{66}{x^2} \longrightarrow x^3 = \frac{66}{4\pi} \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 1,7382 \text{ cm}$$

Se debe comprobar que el valor obtenido minimiza el área total del bote. Para ello, utilizaré el criterio de la segunda derivada. También se puede hacer un estudio de signos de la derivada.

$$f''(x) = 4\pi + \frac{132}{x^3} \longrightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{132}{\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^3} > 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \quad \text{Minimiza la función.}$$

Se calcula el valor de y . $y = \frac{33}{\pi x^2} = \frac{33}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 3,4765 \text{ cm}$

Las dimensiones que minimizan el área total del bote son: $x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 1,7382 \text{ cm}$ $y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 3,4765 \text{ cm}$

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área. $\text{Área} = f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ $x = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$ $y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$

Se sustituyen los valores obtenidos de x e y .

$$\text{Área} = f\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}, 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} = 6\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 \approx 56,9540 \text{ cm}^2$$

El área mínima del bote es: $A = 6\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 \approx 56,9540 \text{ cm}^2$