El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 1

Junio 2019

Discusión y Resolución de un Sistema Lineal de Ecuaciones

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z \ = \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$

Donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ para los que el sistema es compatible y los valores de $\boldsymbol{\alpha}$ para los que el sistema es incompatible.

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Discusión del Sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

Se utilizará para ello el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \text{ y } \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \boldsymbol{\alpha} \end{array}\right)$$

Calculo del rango de A utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Ran(A) < 3$$

Observa que $\boldsymbol{F_3 = F_1 + 2F_2}$

Luego la fila 3 depende de las dos primeras

Se toma un menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{Ran(A) = 2}$$

Ahora se calcula el rango de A^* en función de $\boldsymbol{\alpha}$: Se orla la matriz ampliada.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 14 \rightarrow \alpha - 14 = 0 \rightarrow \alpha = 14$$

Si α=14, Ran(A)=Ran (A^*) = 2 < 3 = nº de incognitas → **Sistema Compatible Indeterminado.**

Si α≠14, Ran(A)=2≠3=ran (A´) → **Sistema Incompatible.**

Resolviendo un Sistema S.C.I

El sistema es compatible indeterminado para α=14. Sustituimos el valor en la tercera ecuación. Como esa ecuación es Linealmente Dependiente, no aporta información para la solución del sistema. Por ello, expresamos una incógnita en función de un parámetro.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=4-\lambda \\ 3x+4y=5-5\lambda \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 5-5\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{(4-\lambda)*4-1*(5-5\lambda)}{1}=\mathbf{11+\lambda}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 3 & 5-5\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{1*(5-5\lambda)-(4-\lambda)*3}{1}=\mathbf{-7-2\lambda}$$

Solución: $\boldsymbol{x=11+\lambda; y=-7-2\lambda; z=\lambda} \quad \boldsymbol{donde\ \lambda\epsilon R}$

Cambiando el sistema y discutiéndolo

Ahora ponemos una incógnita (k) donde está el 11 y volvemos a discutir el sistema.

Se utilizará para ello el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{donde } \boldsymbol{k \neq 11}$$

Calculo del rango de A utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{vmatrix} = k - 11 \ \rightarrow k - 11 = 0 \ \rightarrow k = 11$$

Por ello, el determinante de A nunca podrá ser cero para k≠11 y su Rango valdrá 3.

El rango de A^* también es 3 (ya que no puede ser menor que el de A).

En conclusión, para k≠11, Ran(A)=Ran(A^*)=3=nºde incógnitas. Según el teorema de Rouché, el sistema es **compatible determinado**.