El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 2

Junio 2019

Geometría Euclidiana y Métrica

El enunciado

Sea **π** el plano de ecuación $9x+12y+20z=180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de dos planos paralelos a **π** que distan 4 unidades de **π**.

b) Los puntos A, B y C intersección del plano **π** con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos *A, B y C.*

Planos paralelos

Dos planos paralelos tienen el mismo vector normal. Por ello sus ecuaciones sólo se diferencian en el término independiente. Por ello se puede utilizar la fórmula siguiente: $d_{\pi\sigma} = \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Nos lo da el enunciado

Siendo $\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \pi: 9x + 12y + 20z - 180 = 0$

y $\sigma: Ax + By + Cz + D' = 0 \rightarrow \sigma: 9x + 12y + 20z + D' = 0$

Por ser paralelo A, B y C coinciden.

Aplicamos la fórmula:

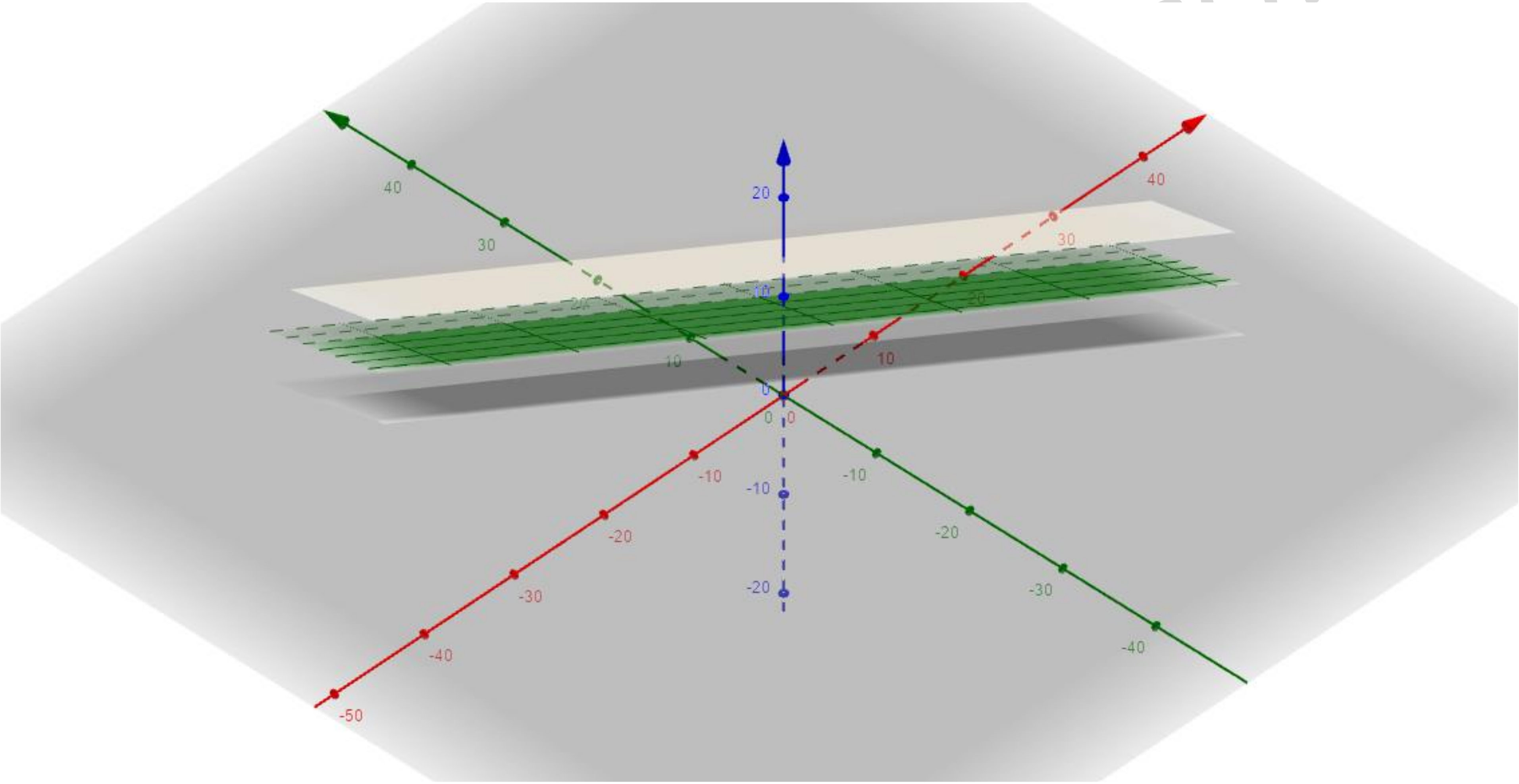
$$d_{\pi\sigma} = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-180 - D'|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|-180 - D'|}{25} = 4 \quad , \begin{cases} \frac{-180-D'}{25} = 4 \rightarrow D' = -280 \\ \frac{-180-D'}{25} = -4 \rightarrow D' = -80 \end{cases}$$

Obtenemos dos planos que son las soluciones pedidas:

$\boldsymbol{\sigma: 9x + 12y + 20z - 280 = 0}$ **y** $\boldsymbol{\sigma': 9x + 12y + 20z - 80 = 0}$

Planos paralelos

Aquí podemos observar los 3 planos. El central es el plano original, y los otros dos son los planos solución.



Intersección recta y plano/Ángulo entre vectores

Las ecuaciones de la rectas que forman los ejes cartesianos en forma paramétrica son:

$$OX:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases};\quad OY:\begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases};\quad OZ:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\nu \end{cases}$$

Del enunciado

$$\pi: 9x+12y+20z-180=0$$

Para calcular la intersección de estas rectas con el plano $\boldsymbol{\pi}$, se sustituye la ecuación de la recta correspondiente en la ecuación del plano.

$$OX\cap\pi: 9\lambda+12*0+20*0=180\rightarrow\lambda=20\rightarrow \boldsymbol{A}=(\mathbf{20},\mathbf{0},\mathbf{0})$$

$$OY\cap\pi: 9*0+12\mu+20*0=180\rightarrow\mu=15\rightarrow \boldsymbol{B}=(\mathbf{0},\mathbf{15},\mathbf{0})$$

$$OZ\cap\pi: 9*0+12*0+20\nu=180\rightarrow\nu=9\rightarrow \boldsymbol{C}=(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{9})$$

Calculamos ahora los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0{,}15{,}0)-(20{,}0{,}0)=(-20{,}15{,}0)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0{,}0{,}9)-(20{,}0{,}0)=(-20{,}0{,}9)$$

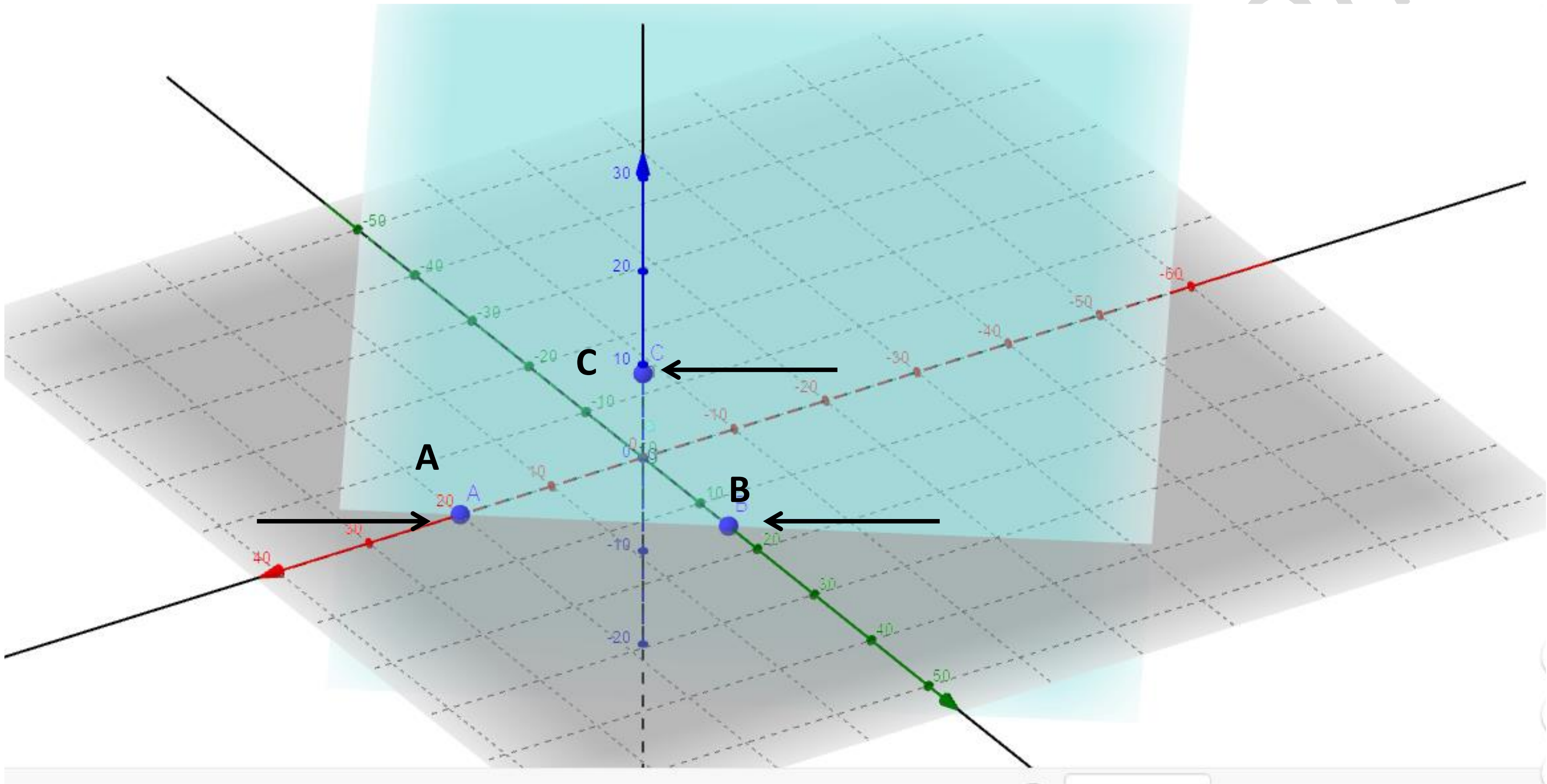
Y aplicamos la fórmula correspondiente: $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|*|\overrightarrow{AC}|}$

$$\cos\alpha=\frac{|(-20{,}15{,}0)\cdot(-20{,}0{,}9)|}{\left(\sqrt{(-20)^2+15^2+0^2}\right)*\left(\sqrt{(-20)^2+0^2+9^2}\right)}=\frac{|(-20)*(-20)+15*0+0*9|}{25*\sqrt{481}}=\frac{400}{25*\sqrt{481}}=0'7295$$

Quedando: $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{43'15°}$

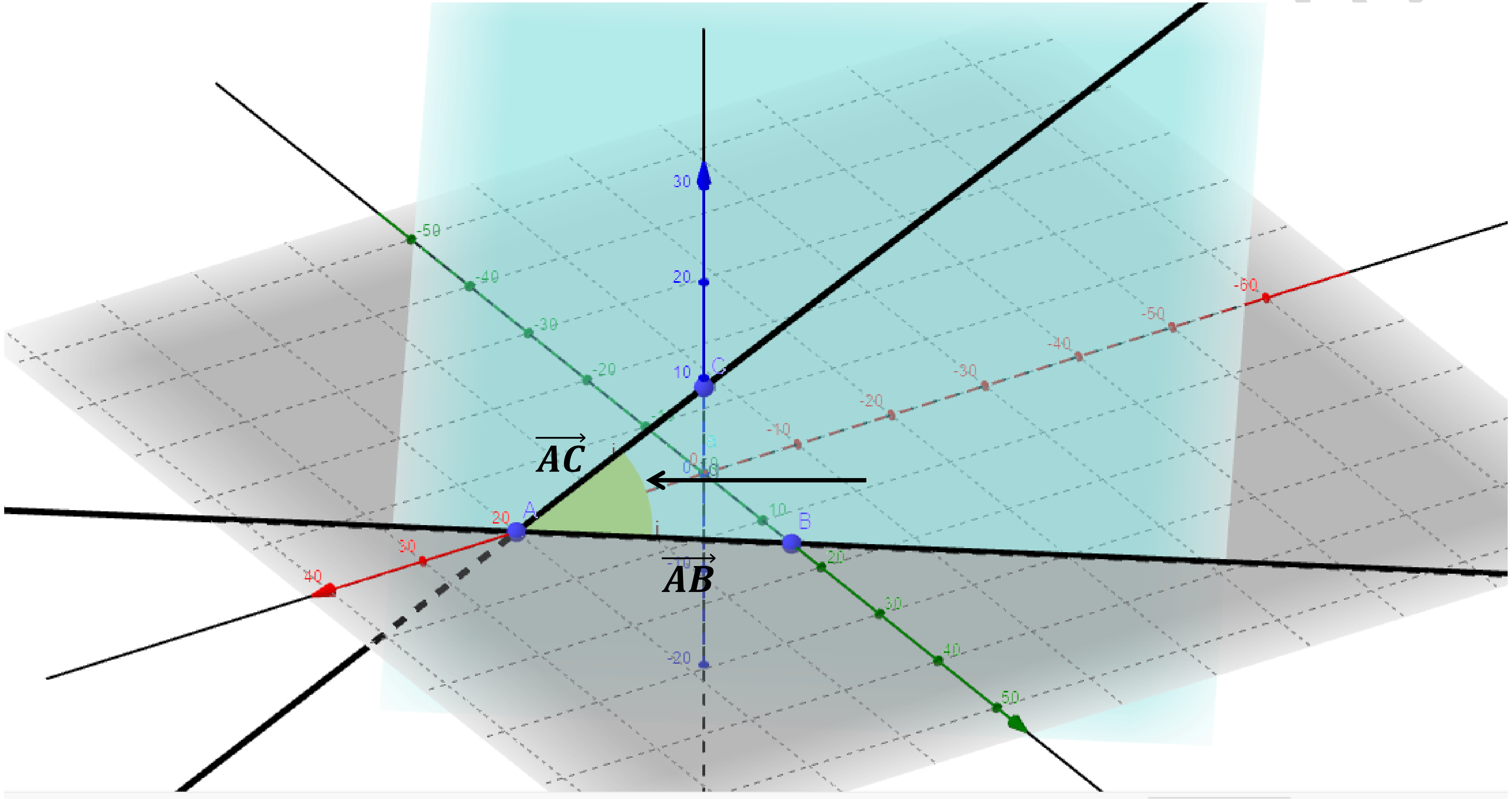
Intersección recta y plano

Podemos observar la intersección del plano con los ejes de coordenadas.



Ángulo entre dos vectores

Ahora podemos observar el ángulo que hemos calculado.



Volumen del tetraedro

Para calcular el volumen del tetraedro a partir de los vértices A,B,C y O , debemos calcular los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\ y\ \overrightarrow{OC}$. Al partir los vectores desde el origen de coordenadas, sus componentes coinciden con los puntos.

$\overrightarrow{OA} = (20,0,0), \quad \overrightarrow{OB} = (0,15,0)\ y \quad \overrightarrow{OC} = (0,0,9)$

Se calcula el volumen del tetraedro con la fórmula correspondiente.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \mathbf{450\ u.v.}$$

$$V = \frac{1}{6}\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)}_{\text{PRODUCTO MIXTO}} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{vmatrix}$$

Volumen del tetraedro

Podemos observar el tetraedro que pasa por A,B,C y O.