El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 3

Junio 2019

Problema

Optimización de Funciones

El enunciado

Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia *f(t)* entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) El tiempo t que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Planteamiento del problema

Tomamos los datos del problema:

A: Parte de (0,0) y llega hasta $\left(0, \frac{375}{2}\right)$

B: Parte desde (250,0) y llega hasta (0,0)

Velocidad de A: (0,30)

Velocidad de B: (-40,0)

Todos los datos están en km y km/h, por lo que el tiempo estará expresado en horas.

En primer lugar definiremos en forma de vectores la posición de ambos móviles.

Para ello recordamos que **espacio=velocidad x tiempo.**

Móvil A: (x,y)=(0,30t)

Móvil B: (x,y)=(250-40t,0)

La distancia entre los móviles A y B será el módulo del vector que los une.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (250 - 40t, 0) - (0{,}30t) = (250 - 40t, -30t)$ y su módulo,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (-30t)^2} = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}$

Por lo tanto $\boldsymbol{f(t)} = \sqrt{\mathbf{62500 - 20000}\boldsymbol{t} + \mathbf{2500}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}$

a) La distancia *f(t)* entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo *t* en horas desde que comenzaron a desplazarse.

Resolución del problema

$$\boldsymbol{f(t) = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}}$$

Para estudiar la monotonía, calculamos primero el dominio de la función, f(t).

El tiempo que tardan en llegar a destino es: $\begin{cases} Móvil\ A \rightarrow 30t = {}^{375}/_{2} \rightarrow t = 6'25\ horas \\ Móvil\ B \rightarrow 40t = 250 \rightarrow t = 6'25\ horas \end{cases}$

Por lo tanto f(t) está definida para **0 ≤ t ≤ 6’25**

Para estudiar la monotonía, calculo la derivada y la igualo a cero. Para después hacer el correspondiente estudio de signos.

$$f'(t) = \frac{-20000+5000t}{2\sqrt{62500-20000t+2500t^2}}\ ;\ \frac{-20000+5000t}{2\sqrt{62500-20000t+2500t^2}} = 0$$

$$-20000 + 5000t = 0 \rightarrow \boldsymbol{t = 4}$$

b) El tiempo t que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

Estudio de la función

Colocamos en la recta real las soluciones de la derivada. $f'(t) = \frac{-20000+5000t}{2\sqrt{62500-20000t+2500t^2}}$

	0 — 4	4 — 6'25
f'(t)	−	+
f(t)	↘	↗

f'(2)<0

f'(6)>0

f(t) es **creciente** en t$\epsilon(4{,}6'25)$ y **decreciente** en t$\epsilon(0{,}4)$

Se observa en el cuadro que la función tiene **un mínimo relativo** en t=4 h, que será el **mínimo absoluto**.

Mínimo: $f(4) = \sqrt{62500 - 20000 * 4 + 2500 * 4^2} = 150$ km

Para calcular el máximo, nos fijamos que debe estar en uno de los dos extremos. Calculamos el valor de la función en ambos extremos.

$f(0) = \sqrt{62500 - 20000 * 0 + 2500 * 0^2} = 250$ km

$f(6'25) = \sqrt{62500 - 20000 * 6'25 + 2500 * 6'25^2} = 187'5$ km

El máximo está en t=0

Solución: La distancia máxima entre los móviles A y B se alcanza en t=0 h y es de 250 km. La mínima para t=4 h y es de 150 km.