El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 1

Junio 2019

Matrices

El enunciado

Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & -2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real ***a,*** y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $\boldsymbol{B^2 = \frac{1}{3}I - 2B}$ siendo I la matriz identidad de orden 3. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El rango de la matriz *A* en función del parámetro *a* y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = m*B + n*I$.

Cálculo del Rango de A

Para calcular el Rango de A, utilizaré el método de los determinantes.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{vmatrix}=2a^2+4a+2 \rightarrow 2a^2+4a+2=0 \rightarrow \boldsymbol{a=-1}$$

Por lo tanto,

Si a≠-1 → $|A|$≠0 → Las **3** filas de la matriz son L.I. → Ran(A)=3

Si a=-1 → $|A|$=0 → Las **3** filas de la matriz son L.D. → Ran(A)<3

Defino A para a=-1 → $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}$

Para comprobar si el rango de A es 2, debo encontrar un menor de orden 2 que sea distinto de 0 (para a=-1).

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}-2 & 0\\ -3 & -2\end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow Hay\ dos\ filas\ L.I. \rightarrow Ran(A)=2$$

En este caso el primer menor es 0, por eso buscamos otro. Cuando encontramos uno distinto de cero, el proceso termina.

Solución: $\begin{cases}\mathbf{Si\ a\neq -1} \rightarrow & \mathbf{Ran(A)=3}\\ \mathbf{Si\ a=-1} \rightarrow & \mathbf{Ran(A)=2}\end{cases}$

Calculo del Determinante

Para calcular $|2A^{-1}|$ aplicaremos las propiedades de los determinantes.

$|2A^{-1}| = 2^3 * |A^{-1}| = 8 * \dfrac{1}{|A|}$

Como $|A| = 2a^2 + 4a + 2$; Para a=1 $|A|$=2*$1^2 + 4 * 1 + 2 = 8$

Por lo que el resultado final será:

$\boldsymbol{\left|2A^{-1}\right| = 8 * \dfrac{1}{8} = 1}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

Para resolver la ecuación matricial dada, se sustituye el valor de a=-1 y se opera. De esta forma obtendremos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se observa que las dos primeras ecuaciones son proporcionales

Como para a=-1 el Rango de A es 2, y observando que las dos primeras filas son proporcionales, podemos deducir que el rango de la matriz ampliada será 2 también, y por lo tanto **el Sistema será Compatible Indeterminado.**

Lo resolveré asignando un parámetro a una de las incógnitas y suprimiendo una de las ecuaciones dependientes. Es sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ -3x - 2y - z = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \alpha = -1 \\ -3x - 2y - \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = \dfrac{3}{2} - 2\alpha \end{cases}$$

Haz las operaciones en tu cuaderno para llegar a la solución

Por si no lo has hecho:

$$-3x - 2y - \alpha = 0 \rightarrow -2y = 3x + \alpha \rightarrow -2y = 3(-1 + \alpha) + \alpha$$

$$-2y = -3 + 3\alpha + \alpha \rightarrow y = \frac{-3 + 4\alpha}{-2} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{3}{2} - 2\alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + \alpha} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{3}{2} - 2\alpha} \\ \boldsymbol{z = \alpha} \end{cases}}$$

Demostración

Para que una matriz tenga inversa: $B * B^{-1} = I$

Por ello debemos tratar de llegar a una expresión análoga a la de arriba con los datos dados.

Desarrollamos la expresión inicial para dejar sola la I a la derecha.

$$B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \rightarrow B^2 + 2B = \frac{1}{3}I \rightarrow \; 3B^2 + 6B = I \rightarrow B * (3B + 6I) = I$$

Comparando la expresión obtenida con la propuesta inicialmente se observa que:

$\boldsymbol{B^{-1}}$ existe y $\boldsymbol{B^{-1} = (3B + 6I)}$

Por lo tanto: m=3 ; n=6