

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 2

Junio 2019

Geometría Euclidiana

El enunciado

Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s .
- b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r .
- c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$.

Posición relativa de las dos rectas

Primero debemos comprobar la posición relativas de las dos rectas, ya que **si se cruzan** no existirá dicho plano. Y el método será diferente si las rectas son paralelas o secantes.

Lo más cómodo es expresar las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de cada una de ellas para los sucesivos apartados.

Recta r

Dado que la x es la única incógnita que se repite, podemos despejar las otras dos incógnitas en función de x y obtener la ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 3 + 2x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Recta s

A partir de la forma continua se puede obtener directamente la forma paramétrica, teniendo en cuenta el punto Q=(0,-1,2) y el vector director $\vec{v} = (1,1,2)$.

$$s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \rightarrow s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Posición relativa de las dos rectas y ecuación del plano

Resumiendo:

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (0,3,3) \\ \vec{u} = (1,1,2) \end{cases} \quad \text{y Recta } s: \begin{cases} Q = (0,-1,2) \\ \vec{v} = (1,1,2) \end{cases}$$

Se observa que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales y por ello las rectas r y s **son paralelas**. Las rectas podrían ser coincidentes, pero en ese caso habría infinitos planos que contuvieran a ambas.

Para obtener la ecuación del plano, se necesitan un punto y dos vectores directores.

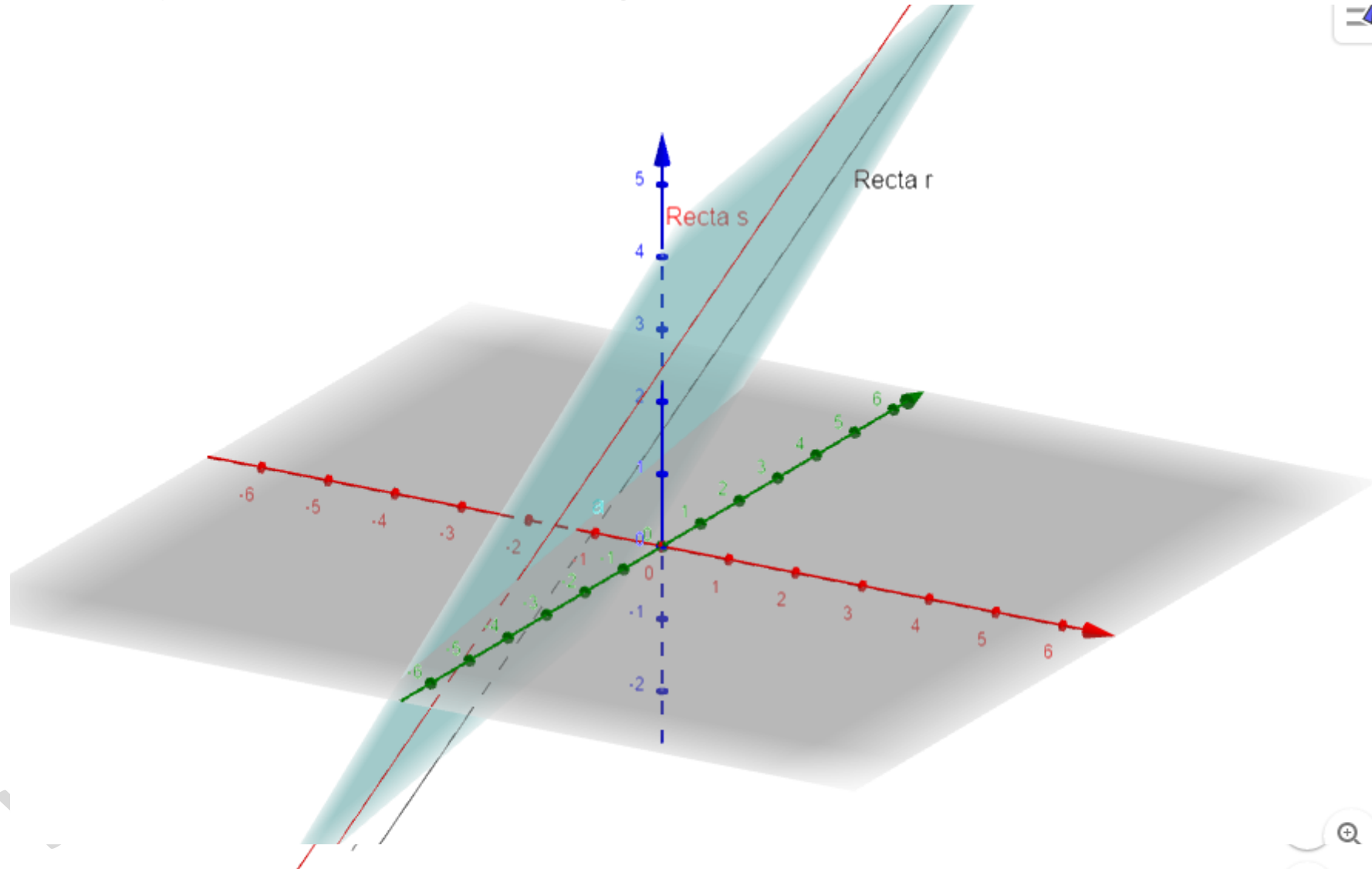
El vector director que falta lo obtendremos de los dos puntos que unen ambas rectas, es decir: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,-1,2) - (0,3,3) = (0,-4,-1)$

La ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x + y - 4z + 9 = 0$$

Por lo tanto, la solución será: $\pi: 7x + y - 4z + 9 = 0$

Representación gráfica de la solución



Recta perpendicular a otra

1) Calculo la ecuación del plano σ que pasa por P y es perpendicular a r:

Datos: $P=(0,-1,2)$ y $\vec{u} = (1,1,2)$; donde $\vec{u}$ será el vector normal del plano.

La ecuación normal del plano es $\sigma: A * (x - x_0) + B * (y - y_0) + C * (z - z_0) = 0$

Sustituyendo: $\sigma: 1 * (x - 0) + 1 * (y + 1) + 2 * (z - 2) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma: x + y + 2z - 3 = 0}$

2) A continuación, se calcula la intersección de la recta r con el plano σ .

Para ello se sustituye la ecuación paramétrica de la recta r en la ecuación del plano σ .

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda + (3 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \rightarrow \lambda = -1 ; \text{ Sustituyendo en } r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

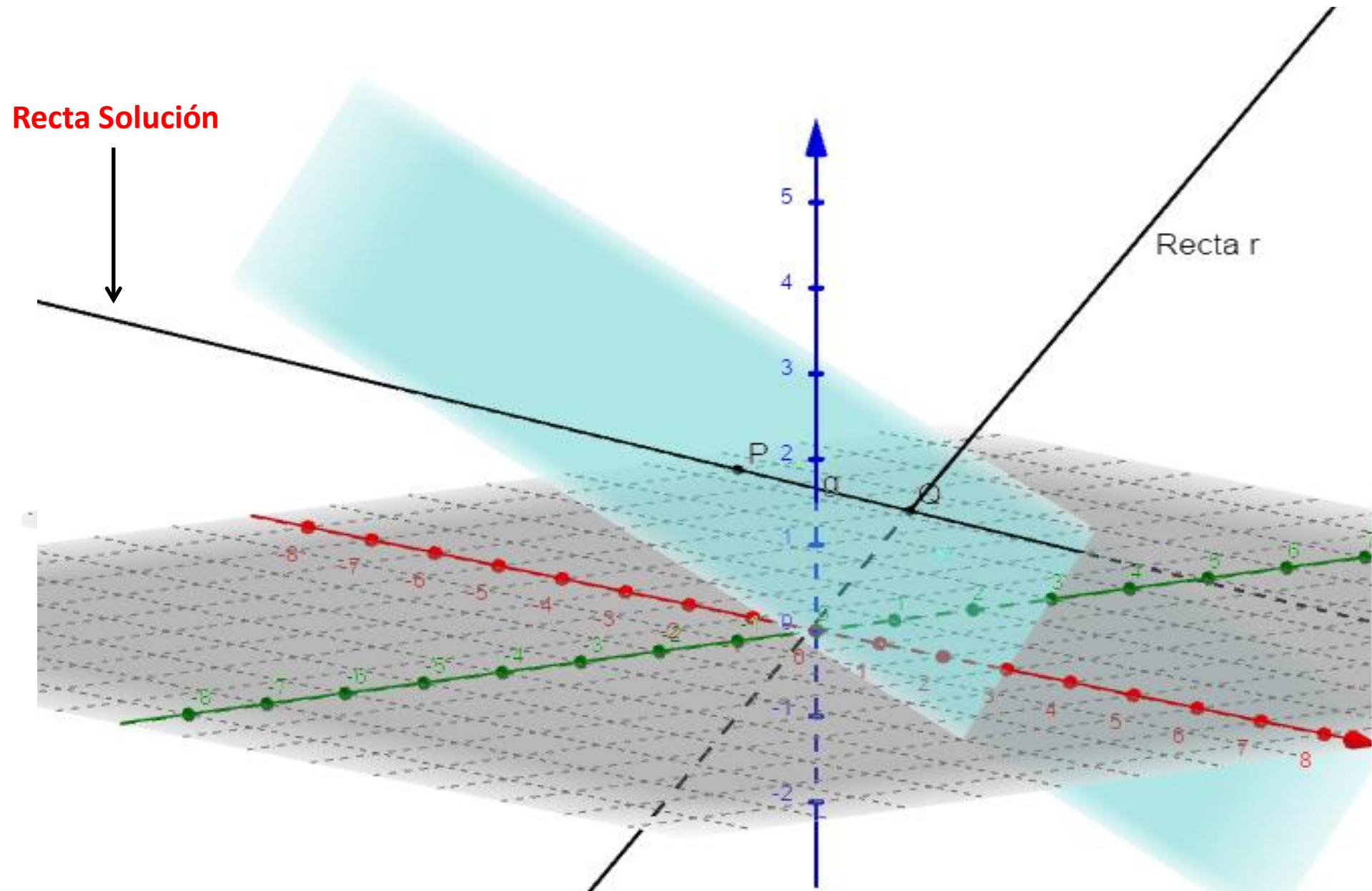
Siendo el punto de intersección $Q=(-1,2,1)$

3) La ecuación de la recta pedida pasará por los puntos $P=(0,-1,2)$ y $Q=(-1,2,1)$.

Calculo el vector director: $\vec{w} = Q - P = (-1,2,1) - (0,-1,2) = (-1,3,-1)$

Y la ecuación de la recta en forma paramétrica será. $t: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

Representación gráfica de la solución



Recta contenida/Parámetros

Para que la recta s esté contenida en el plano π , todos sus puntos deben pertenecer a dicho plano.

Esa condición se obtiene al sustituir la ecuación de la recta en el plano.

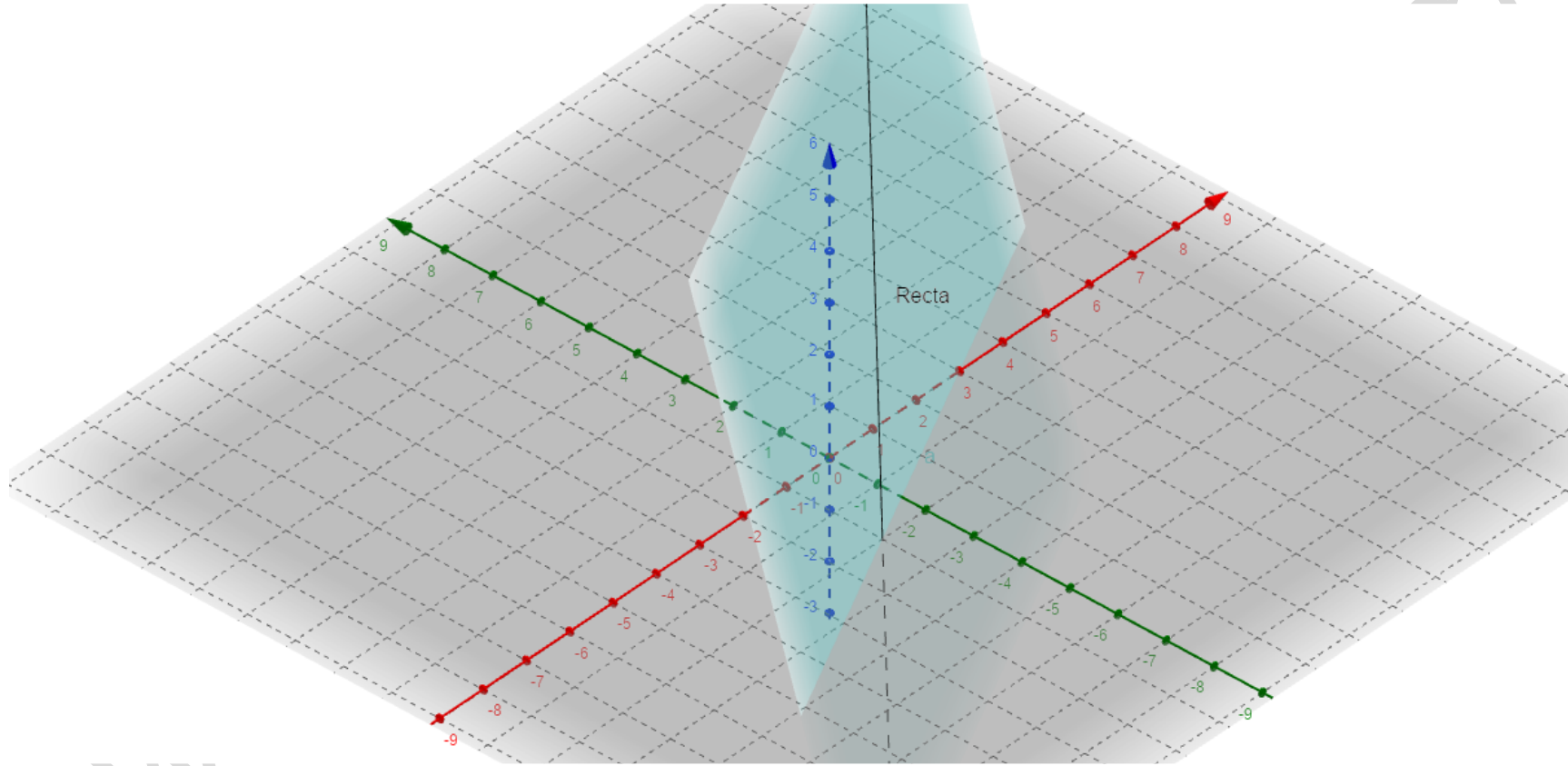
$$s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases} \rightarrow \mu - 2(-1 + \mu) + a(2 + 2\mu) = b \rightarrow \mu(-1 + 2a) = b - 2 - 2a$$

Para que todos los puntos de la recta pertenezcan al plano, la ecuación debe verificarse para cualquier valor de μ , y para ello debe cumplir en este caso

que $0=0$. Por ello nos queda el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} -1 + 2a = 0 \\ b - 2 - 2a = 0 \end{cases}$$

Al resolverlo obtenemos la solución pedida: **$a=1/2$ y $b=3$**

Representación gráfica de la solución



Se observa la recta contenida en el plano obtenido.