El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 3

Junio 2019

Análisis

El enunciado

Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos el razonamiento utilizado.

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función *f(x)*.

b) La representación gráfica de la curva de la curva *y = f(x).*

c) El valor del parámetro *a* para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función *g(x) = f(x)+a*x*.

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)dx, \int xe^{-x}dx$.

Estudio de la función

Por estar compuesta la función por polinomios y una función exponencial, el dominio de la función es R. **Dom f(x)=R**.

Por ello, la función **no tiene asíntotas verticales**.

Estudiaremos si la función tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{\infty} = L\acute{}Hopital = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = L\acute{}Hopital = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Por ello f(x) presenta una **Asíntota Horizontal en y=0**.

A continuación estudiamos la monotonía:

$$f'(x) = 1 * e^{-x^2} + x * (-2x) * e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2); \; e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$$

$$\begin{cases} e^{-x^2} = 0 \to x = \nexists \\ 1-2x^2 = 0 \to x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

estudiamos el signo de la derivada a continuación.

Estudio de la función

Colocamos en la recta real las soluciones de la derivada.

$-\infty$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad +\infty$

f'(x)	$-$	$+$	$-$
f(x)	↘	↗	↘

f(x) es **creciente** en $x\epsilon\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y **decreciente** en $x\epsilon\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \cup\ \left(+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo y un máximo relativo.

Mínimo: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}},-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\right)\cong(\mathbf{-0'71,-0,43})$

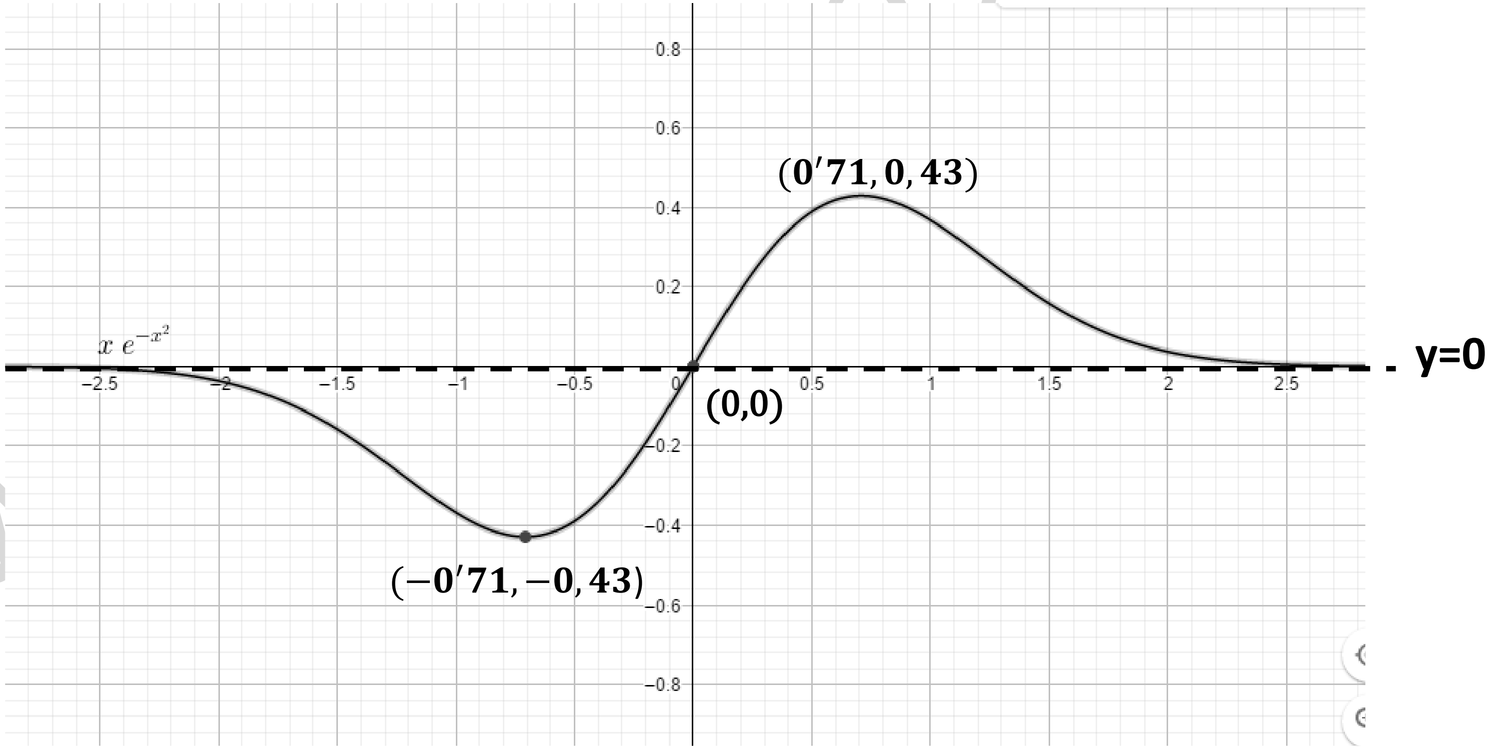
Máximo: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)=\left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}},\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\right)\cong(\mathbf{0'71,0,43})$

Representación gráfica de f(x)

Para poder completar la representación gráfica, se calcularán los puntos de corte con los ejes.

Eje X (y=0): $xe^{-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = \nexists \end{cases} \rightarrow$ **(0,0)**

Eje Y (x=0): $f(0) = 0 * e^{-0^2} = 0 \rightarrow$ **(0,0)**



Teorema de Rolle/Integrales

El teorema de Rolle dice:

Si f(x) es **continua** en [a, b], f(x) **derivable** en (a, b) y **f(a)=f(b)** entonces **∃ c ∈ (a,b)/f´(c)=0**.

La función g(x)=xe^{-x^2}+ax es continua y derivable en R, para poder aplicar el teorema de Rolle debe cumplirse que g(0)=g(1).

$$g(0) = 0 \ y \ g(1) = e^{-1} + a \rightarrow \frac{1}{e} + a = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = -\frac{1}{e}}}$$

Solución del apartado c)

En el último apartado pide que calculemos dos primitivas.

La primera es semi-inmediata, ya que se puede obtener la derivada del exponente multiplicando por 2 la función.

$$\int xe^{-x^2}dx = \int \frac{-2}{-2}xe^{-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int 2xe^{-x^2}dx = \boxed{\boldsymbol{\frac{-1}{2}e^{-x^2} + C}}$$

La segunda integral se hace por partes utilizando: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int xe^{-x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = 1dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = \int e^{-x}dx \rightarrow v = -\int -e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

$$\int xe^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = \boxed{\boldsymbol{-xe^{-x} - e^{-x} + C}}$$