

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 1

Junio 2019

Matrices

El enunciado

Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & -2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a , y

una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ siendo I la matriz identidad de orden 3. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = m*B + n*I$.

Cálculo del Rango de A

Para calcular el Rango de A, utilizaré el método de los determinantes.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 4a + 2 \rightarrow 2a^2 + 4a + 2 = 0 \rightarrow \mathbf{a = -1}$$

Por lo tanto,

Si $a \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Las **3** filas de la matriz son L.I. $\rightarrow \text{Ran}(A) = 3$

Si $a = -1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Las **3** filas de la matriz son L.D. $\rightarrow \text{Ran}(A) < 3$

$$\text{Defino A para } a = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar si el rango de A es 2, debo encontrar un menor de orden 2 que sea distinto de 0 (para $a = -1$).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Hay dos filas L.I.} \rightarrow \text{Ran}(A) = 2$$

En este caso el primer menor es 0, por eso buscamos otro. Cuando encontramos uno distinto de cero, el proceso termina.

$$\text{Solución: } \begin{cases} \text{Si } a \neq -1 \rightarrow \text{Ran}(A) = 3 \\ \text{Si } a = -1 \rightarrow \text{Ran}(A) = 2 \end{cases}$$

Calculo del Determinante

Para calcular $|2A^{-1}|$ aplicaremos las propiedades de los determinantes.

$$|2A^{-1}| = 2^3 * |A^{-1}| = 8 * \frac{1}{|A|}$$

Como $|A| = 2a^2 + 4a + 2$; Para $a=1$ $|A|=2*1^2 + 4*1 + 2 = 8$

Por lo que el resultado final será:

$$|2A^{-1}| = 8 * \frac{1}{8} = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

Para resolver la ecuación matricial dada, se sustituye el valor de $a=-1$ y se opera. De esta forma obtendremos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se observa que las dos primeras ecuaciones son proporcionales

Como para $a=-1$ el Rango de A es 2, y observando que las dos primeras filas son proporcionales, podemos deducir que el rango de la matriz ampliada será 2 también, y por lo tanto **el Sistema será Compatible Indeterminado**.

Lo resolveré asignando un parámetro a una de las incógnitas y suprimiendo una de las ecuaciones dependientes. El sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ -3x - 2y - z = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \alpha = -1 \\ -3x - 2y - \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - 2\alpha \end{cases}$$

Haz las operaciones en tu cuaderno para llegar a la solución

Por si no lo has hecho:

$$\begin{aligned} -3x - 2y - \alpha &= 0 \rightarrow -2y = 3x + \alpha \rightarrow -2y = 3(-1 + \alpha) + \alpha \\ -2y &= -3 + 3\alpha + \alpha \rightarrow y = \frac{-3 + 4\alpha}{-2} \rightarrow y = \frac{3}{2} - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Demostración

Para que una matriz tenga inversa: $B * B^{-1} = I$

Por ello debemos tratar de llegar a una expresión análoga a la de arriba con los datos dados.

Desarrollamos la expresión inicial para dejar sola la I a la derecha.

$$B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \rightarrow B^2 + 2B = \frac{1}{3}I \rightarrow 3B^2 + 6B = I \rightarrow B * (3B + 6I) = I$$

Comparando la expresión obtenida con la propuesta inicialmente se observa que:

$$\mathbf{B^{-1} existe y B^{-1} = (3B + 6I)}$$

Por lo tanto: m=3 ; n=6

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 2

Junio 2019

Geometría Euclidiana

El enunciado

Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s .
- b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r .
- c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$.

Posición relativa de las dos rectas

Primero debemos comprobar la posición relativas de las dos rectas, ya que **si se cruzan** no existirá dicho plano. Y el método será diferente si las rectas son paralelas o secantes.

Lo más cómodo es expresar las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de cada una de ellas para los sucesivos apartados.

Recta r

Dado que la x es la única incógnita que se repite, podemos despejar las otras dos incógnitas en función de x y obtener la ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 3 + 2x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Recta s

A partir de la forma continua se puede obtener directamente la forma paramétrica, teniendo en cuenta el punto Q=(0,-1,2) y el vector director $\vec{v} = (1,1,2)$.

$$s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \rightarrow s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Posición relativa de las dos rectas y ecuación del plano

Resumiendo:

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (0,3,3) \\ \vec{u} = (1,1,2) \end{cases} \quad \text{y Recta } s: \begin{cases} Q = (0,-1,2) \\ \vec{v} = (1,1,2) \end{cases}$$

Se observa que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales y por ello las rectas r y s **son paralelas**. Las rectas podrían ser coincidentes, pero en ese caso habría infinitos planos que contuvieran a ambas.

Para obtener la ecuación del plano, se necesitan un punto y dos vectores directores.

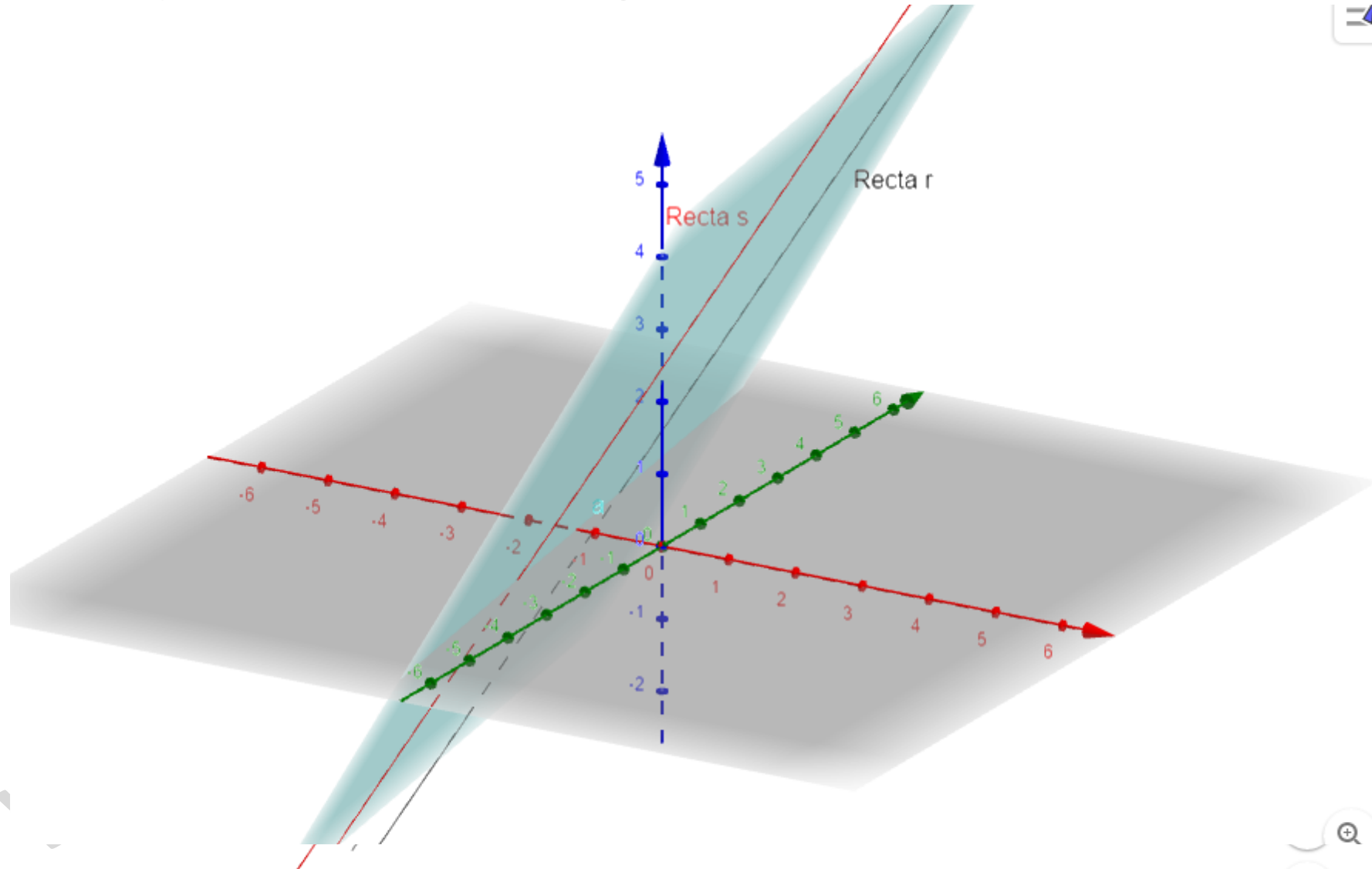
El vector director que falta lo obtendremos de los dos puntos que unen ambas rectas, es decir: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,-1,2) - (0,3,3) = (0,-4,-1)$

La ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x + y - 4z + 9 = 0$$

Por lo tanto, la solución será: $\pi: 7x + y - 4z + 9 = 0$

Representación gráfica de la solución



Recta perpendicular a otra

1) Calculo la ecuación del plano σ que pasa por P y es perpendicular a r:

Datos: $P=(0,-1,2)$ y $\vec{u} = (1,1,2)$; donde $\vec{u}$ será el vector normal del plano.

La ecuación normal del plano es $\sigma: A * (x - x_0) + B * (y - y_0) + C * (z - z_0) = 0$

Sustituyendo: $\sigma: 1 * (x - 0) + 1 * (y + 1) + 2 * (z - 2) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma: x + y + 2z - 3 = 0}$

2) A continuación, se calcula la intersección de la recta r con el plano σ .

Para ello se sustituye la ecuación paramétrica de la recta r en la ecuación del plano σ .

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda + (3 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \rightarrow \lambda = -1 ; \text{ Sustituyendo en } r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

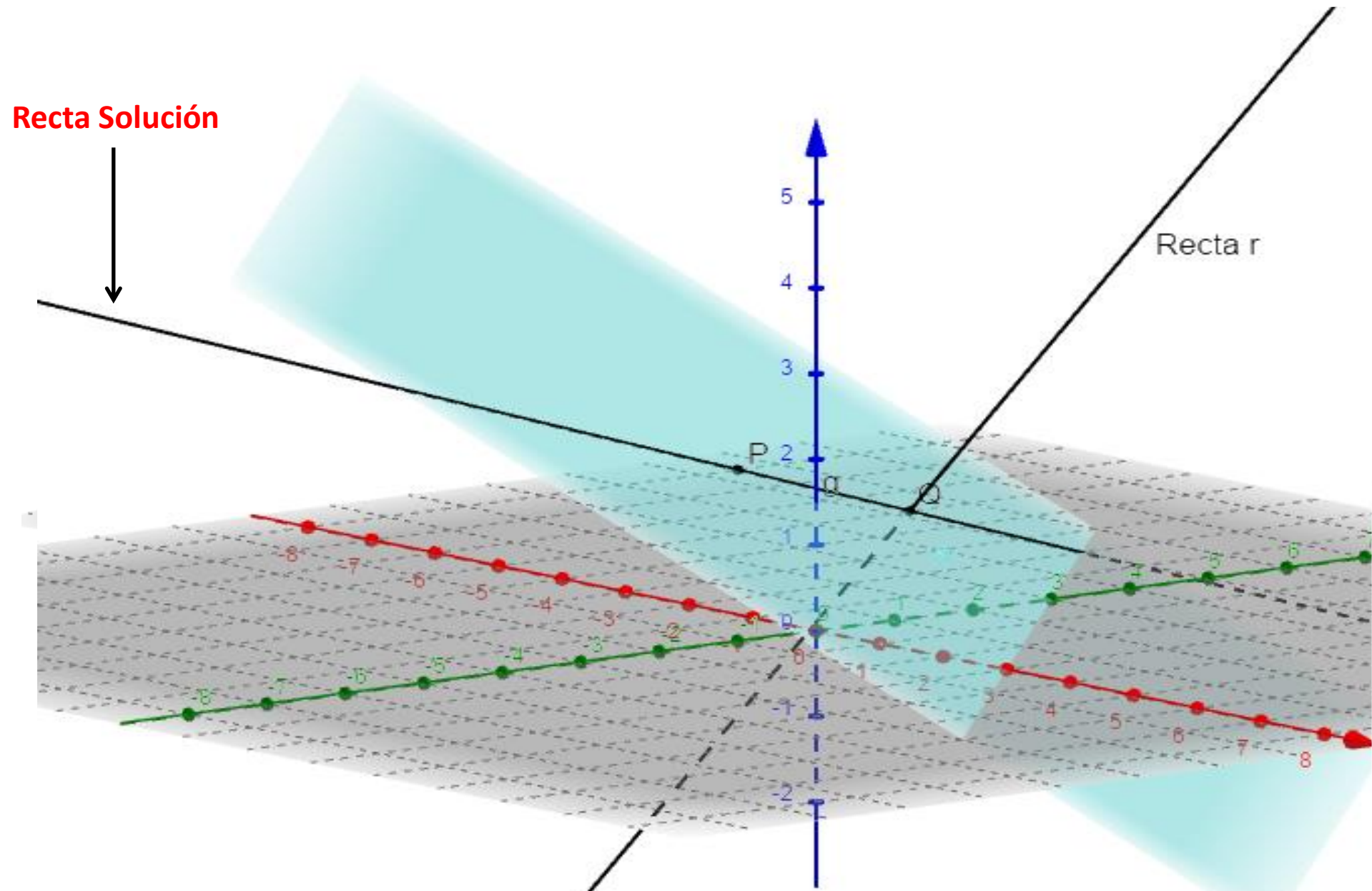
Siendo el punto de intersección $Q=(-1,2,1)$

3) La ecuación de la recta pedida pasará por los puntos $P=(0,-1,2)$ y $Q=(-1,2,1)$.

Calculo el vector director: $\vec{w} = Q - P = (-1,2,1) - (0,-1,2) = (-1,3,-1)$

Y la ecuación de la recta en forma paramétrica será. $t: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

Representación gráfica de la solución



Recta contenida/Parámetros

Para que la recta s esté contenida en el plano π , todos sus puntos deben pertenecer a dicho plano.

Esa condición se obtiene al sustituir la ecuación de la recta en el plano.

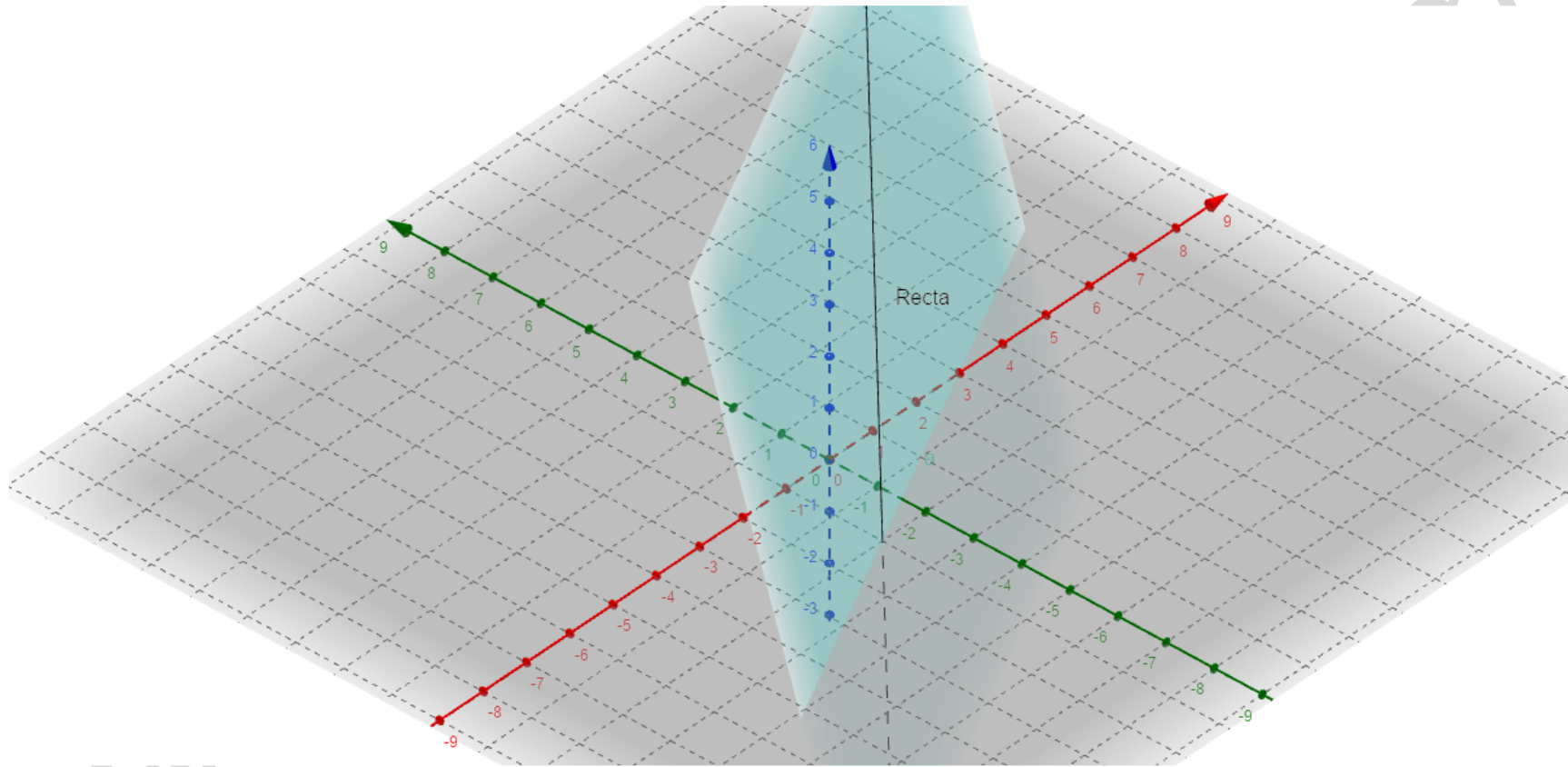
$$s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases} \rightarrow \mu - 2(-1 + \mu) + a(2 + 2\mu) = b \rightarrow \mu(-1 + 2a) = b - 2 - 2a$$

Para que todos los puntos de la recta pertenezcan al plano, la ecuación debe verificarse para cualquier valor de μ , y para ello debe cumplir en este caso

que $0=0$. Por ello nos queda el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} -1 + 2a = 0 \\ b - 2 - 2a = 0 \end{cases}$$

Al resolverlo obtenemos la solución pedida: **$a=1/2$ y $b=3$**

Representación gráfica de la solución



Se observa la recta contenida en el plano obtenido.

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 3

Junio 2019

Análisis

El enunciado

Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos el razonamiento utilizado.

- a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
- b) La representación gráfica de la curva de la curva $y = f(x)$.
- c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + a \cdot x$.
- d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)dx$, $\int xe^{-x}dx$.

Estudio de la función

Por estar compuesta la función por polinomios y una función exponencial, el dominio de la función es $\mathbb{R}$. **Dom $f(x)=\mathbb{R}$.**

Por ello, la función **no tiene asíntotas verticales**.

Estudiaremos si la función tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \frac{-\infty}{\infty} = L'Hopital = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = L'Hopital = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Por ello $f(x)$ presenta una **Asíntota Horizontal en $y=0$** .

A continuación estudiamos la monotonía:

$$f'(x) = 1 * e^{-x^2} + x * (-2x) * e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2); e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$$
$$\begin{cases} e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = \nexists \\ 1 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

estudiamos el signo de la derivada a continuación.

Estudio de la función

Colocamos en la recta real las soluciones de la derivada.

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$				

$f(x)$ es **creciente** en $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y **decreciente** en $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo y un máximo relativo.

Mínimo: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right) \cong (-0'71, -0,43)$

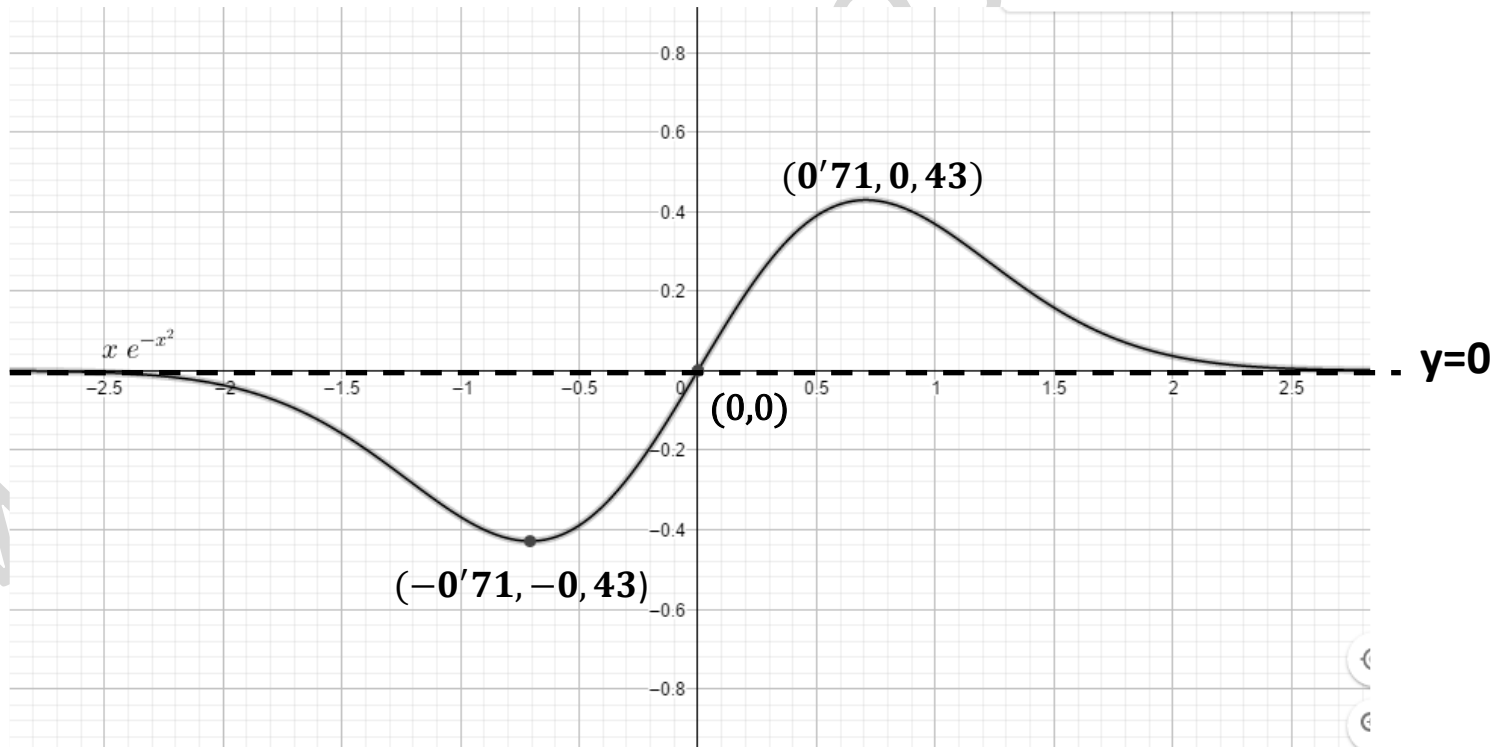
Máximo: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right) \cong (0'71, 0,43)$

Representación gráfica de $f(x)$

Para poder completar la representación gráfica, se calcularán los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Eje X (y=0): } x e^{-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = \nexists \end{cases} \rightarrow (0,0)$$

$$\text{Eje Y (x=0): } f(0) = 0 * e^{-0^2} = 0 \rightarrow (0,0)$$



Teorema de Rolle/Integrales

El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es **continua** en $[a, b]$, $f(x)$ **derivable** en (a, b) y $f(a)=f(b)$ entonces $\exists c \in (a,b)/f'(c)=0$.

La función $g(x)=xe^{-x^2}+ax$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, para poder aplicar el teorema de Rolle debe cumplirse que $g(0)=g(1)$.

$$g(0) = 0 \text{ y } g(1) = e^{-1} + a \rightarrow \frac{1}{e} + a = 0 \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{e}} \text{ Solución del apartado c)}$$

En el último apartado pide que calculemos dos primitivas.

La primera es semi-inmediata, ya que se puede obtener la derivada del exponente multiplicando por 2 la función.

$$\int xe^{-x^2} dx = \int \frac{-2}{-2} xe^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int 2xe^{-x^2} dx = \boxed{\frac{-1}{2} e^{-x^2} + C}$$

La segunda integral se hace por partes utilizando: $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int xe^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx \rightarrow v = -\int -e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\}$$

$$\int xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 1

Junio 2019

Discusión y Resolución de un Sistema
Lineal de Ecuaciones

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$$

Donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.
- b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.
- c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Discusión del Sistema

Se utilizará para ello el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$$



Calculo del rango de A utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Ran}(A) < 3$$

Se toma un menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Ran}(A) = 2$$

Ahora se calcula el rango de A^* en función de α : Se orla la matriz ampliada.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 14 \rightarrow \alpha - 14 = 0 \rightarrow \alpha = 14$$

Si $\alpha=14$, $\text{Ran}(A)=\text{Ran}(A^*)=2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado.**

Si $\alpha \neq 14$, $\text{Ran}(A)=2 \neq 3 = \text{ran}(A^*) \rightarrow$ **Sistema Incompatible.**

Observa que $F_3 = F_1 + 2F_2$

Luego la fila 3 depende de las dos primeras

Resolviendo un Sistema S.C.I

El sistema es compatible indeterminado para $\alpha=14$. Sustituimos el valor en la tercera ecuación. Como esa ecuación es Linealmente Dependiente, no aporta información para la solución del sistema. Por ello, expresamos una incógnita en función de un parámetro.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 4 - \lambda \\ 3x + 4y = 5 - 5\lambda \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 5 - 5\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(4 - \lambda) * 4 - 1 * (5 - 5\lambda)}{1} = 11 + \lambda$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - \lambda \\ 3 & 5 - 5\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 * (5 - 5\lambda) - (4 - \lambda) * 3}{1} = -7 - 2\lambda$$

Solución: $x = 11 + \lambda$; $y = -7 - 2\lambda$; $z = \lambda$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$

Cambiando el sistema y discutiéndolo

Ahora ponemos una incógnita (k) donde está el 11 y volvemos a discutir el sistema.

Se utilizará para ello el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{donde } k \neq 11$$

Calculo del rango de A utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{vmatrix} = k - 11 \rightarrow k - 11 = 0 \rightarrow k = 11$$

Por ello, el determinante de A nunca podrá ser cero para $k \neq 11$ y su Rango valdrá 3.

El rango de A^* también es 3 (ya que no puede ser menor que el de A).

En conclusión, para $k \neq 11$, $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Según el teorema de Rouché, el sistema es **compatible determinado**.

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 2

Junio 2019

Geometría Euclidian y Métrica

El enunciado

Sea π el plano de ecuación $9x+12y+20z=180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las ecuaciones de dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π .
- b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
- c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos A, B y C.

Planos paralelos

Dos planos paralelos tienen el mismo vector normal. Por ello sus ecuaciones sólo se diferencian en el término independiente. Por ello se puede utilizar la

fórmula siguiente: $d_{\pi\sigma} = \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Nos lo da el enunciado

Siendo $\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \pi: 9x + 12y + 20z - 180 = 0$

y $\sigma: Ax + By + Cz + D' = 0 \rightarrow \sigma: 9x + 12y + 20z + D' = 0$

Por ser paralelo A, B y C coinciden.

Aplicamos la fórmula:

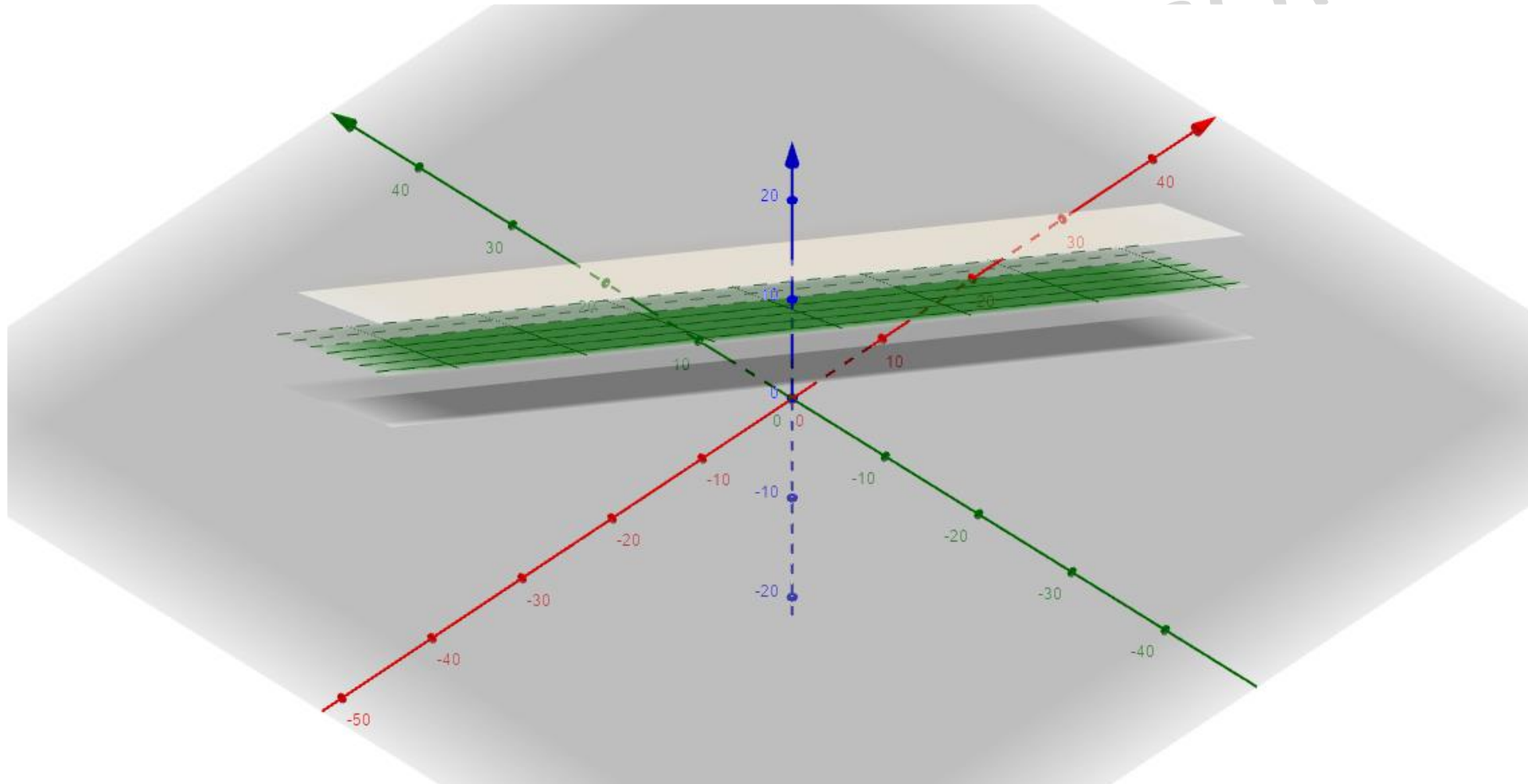
$$d_{\pi\sigma} = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-180 - D'|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|-180 - D'|}{25} = 4 \quad , \quad \begin{cases} \frac{-180 - D'}{25} = 4 \rightarrow D' = -280 \\ \frac{-180 - D'}{25} = -4 \rightarrow D' = -80 \end{cases}$$

Obtenemos dos planos que son las soluciones pedidas:

$\sigma: 9x + 12y + 20z - 280 = 0$ y $\sigma': 9x + 12y + 20z - 80 = 0$

Planos paralelos

Aquí podemos observar los 3 planos. El central es el plano original, y los otros dos son los planos solución.



Intersección recta y plano/Ángulo entre vectores

Las ecuaciones de las rectas que forman los ejes cartesianos en forma paramétrica son:

$$OX: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}; \quad OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \nu \end{cases} \quad \text{Del enunciado} \quad \pi: 9x + 12y + 20z - 180 = 0$$

Para calcular la intersección de estas rectas con el plano π , se sustituye la ecuación de la recta correspondiente en la ecuación del plano.

$$OX \cap \pi: 9\lambda + 12 * 0 + 20 * 0 = 180 \rightarrow \lambda = 20 \rightarrow \mathbf{A} = (20, 0, 0)$$

$$OY \cap \pi: 9 * 0 + 12\mu + 20 * 0 = 180 \rightarrow \mu = 15 \rightarrow \mathbf{B} = (0, 15, 0)$$

$$OZ \cap \pi: 9 * 0 + 12 * 0 + 20\nu = 180 \rightarrow \nu = 9 \rightarrow \mathbf{C} = (0, 0, 9)$$

Calculamos ahora los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 15, 0) - (20, 0, 0) = (-20, 15, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 9) - (20, 0, 0) = (-20, 0, 9)$$

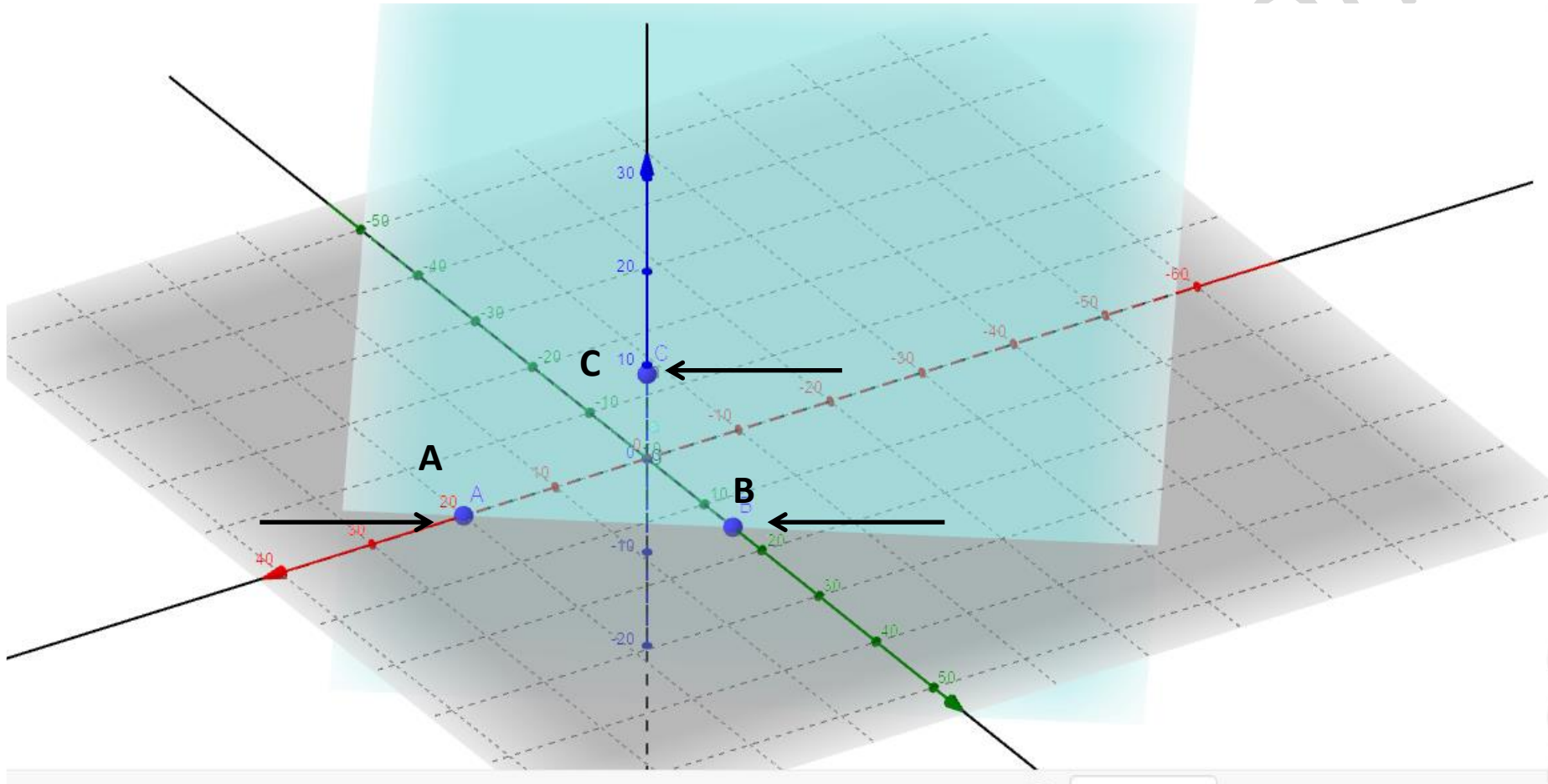
Y aplicamos la fórmula correspondiente: $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| * |\overrightarrow{AC}|}$

$$\cos \alpha = \frac{|(-20, 15, 0) \cdot (-20, 0, 9)|}{(\sqrt{(-20)^2 + 15^2 + 0^2}) * (\sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 9^2})} = \frac{|(-20) * (-20) + 15 * 0 + 0 * 9|}{25 * \sqrt{481}} = \frac{400}{25 * \sqrt{481}} = 0.7295$$

Quedando: $\alpha = 43'15^\circ$

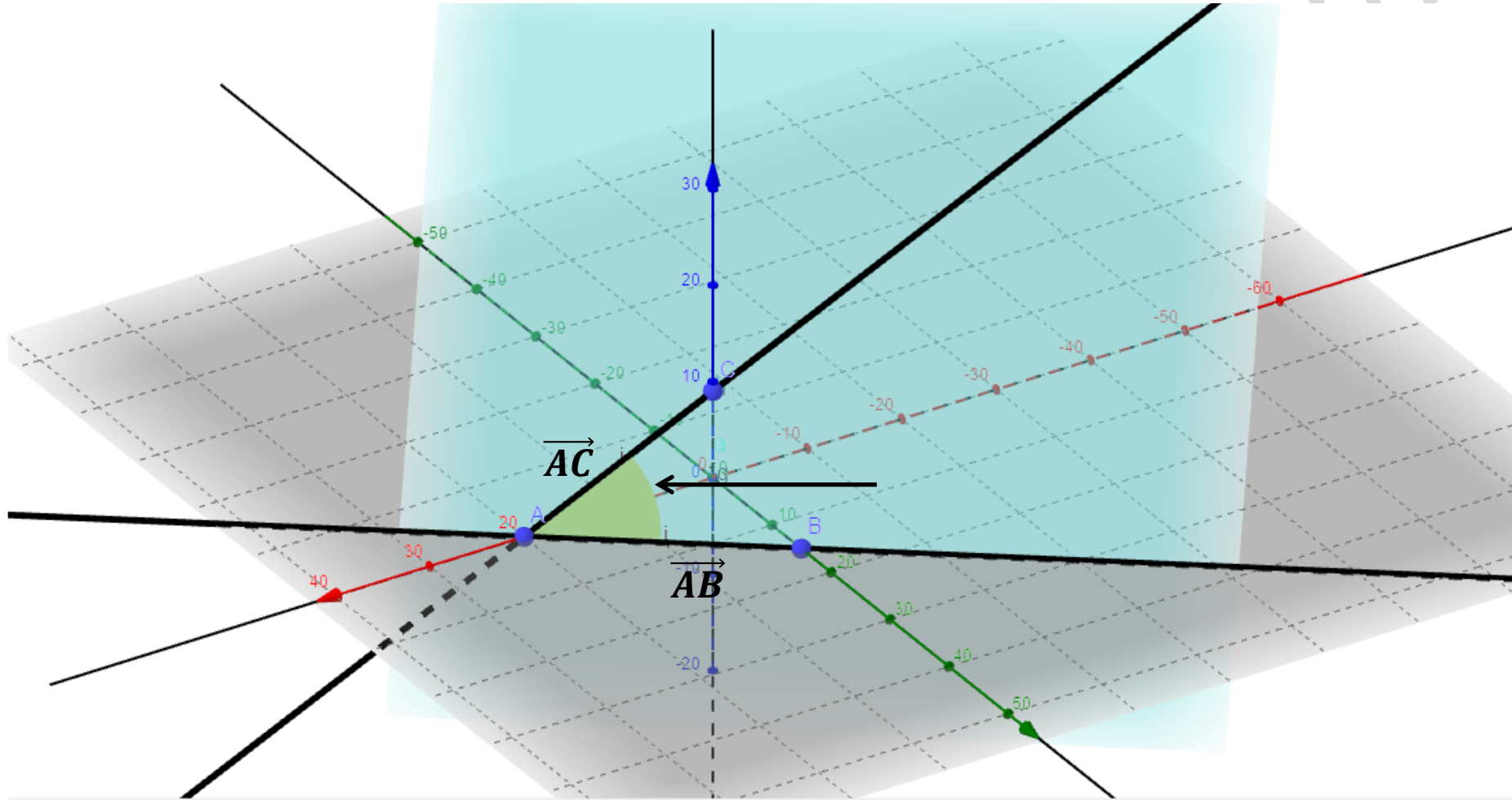
Intersección recta y plano

Podemos observar la intersección del plano con los ejes de coordenadas.



Ángulo entre dos vectores

Ahora podemos observar el ángulo que hemos calculado.



Volumen del tetraedro

Para calcular el volumen del tetraedro a partir de los vértices A,B,C y O , debemos calcular los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$. Al partir los vectores desde el origen de coordenadas, sus componentes coinciden con los puntos.

$$\overrightarrow{OA} = (20,0,0), \quad \overrightarrow{OB} = (0,15,0) \text{ y } \quad \overrightarrow{OC} = (0,0,9)$$

Se calcula el volumen del tetraedro con la fórmula correspondiente.

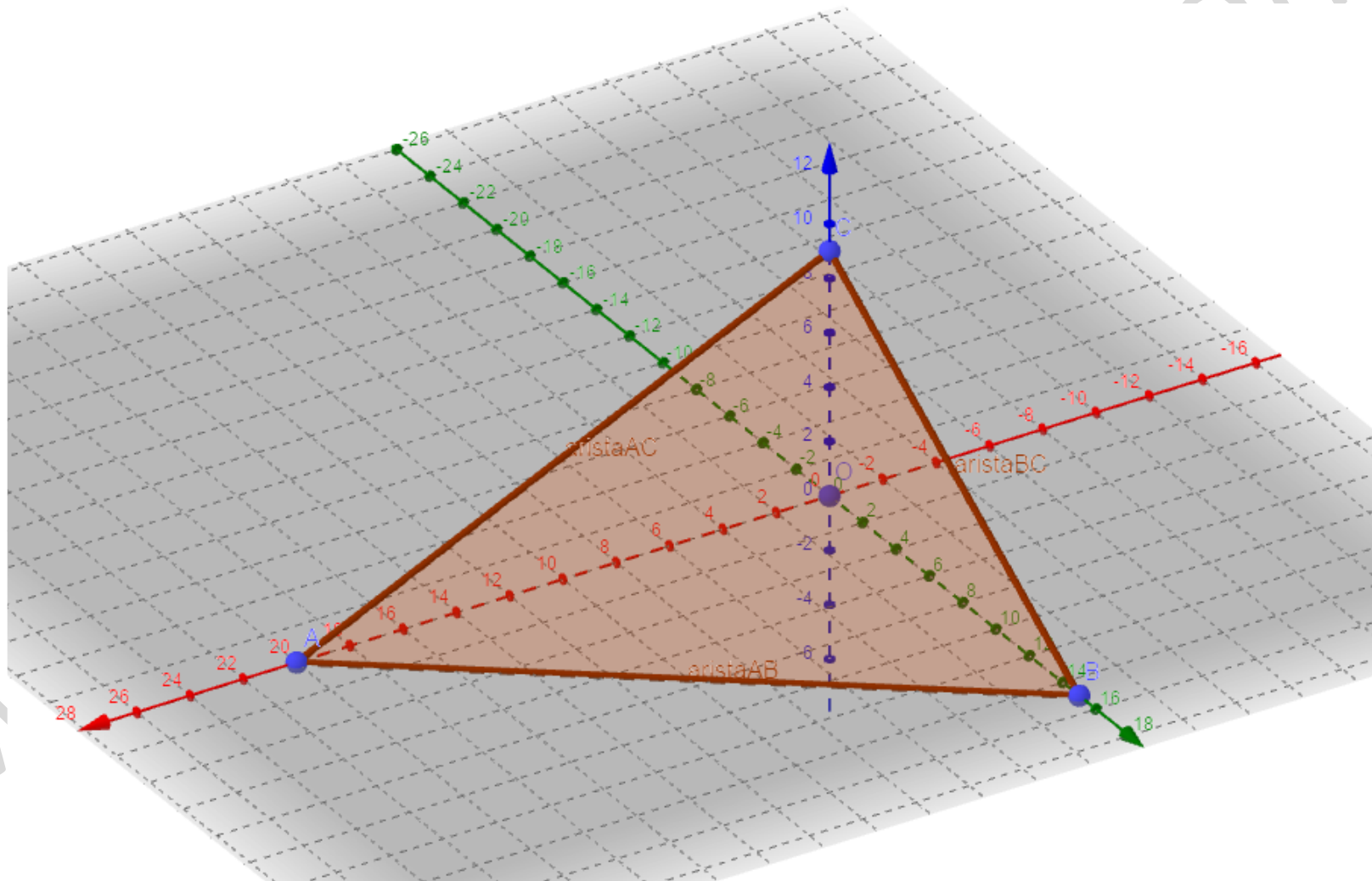
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \mathbf{450 \text{ u. v.}}$$

$$V = \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{vmatrix}$$

PRODUCTO MIXTO

Volumen del tetraedro

Podemos observar el tetraedro que pasa por A,B,C y O.



El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 3

Junio 2019

Problema

Optimización de Funciones

El enunciado

Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.
- b) El tiempo t que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.
- c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Planteamiento del problema

Tomamos los datos del problema:

A: Parte de (0,0) y llega hasta $(0, \frac{375}{2})$

B: Parte desde (250,0) y llega hasta (0,0)

Velocidad de A: (0,30)

Velocidad de B: (-40,0)

Todos los datos están en km y km/h, por lo que el tiempo estará expresado en horas.

En primer lugar definiremos en forma de vectores la posición de ambos móviles.

Para ello recordamos que **espacio=velocidad x tiempo**.

Móvil A: $(x,y)=(0,30t)$

Móvil B: $(x,y)=(250-40t,0)$

La distancia entre los móviles A y B será el módulo del vector que los une.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (250 - 40t, 0) - (0, 30t) = (250 - 40t, -30t)$ y su módulo,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (-30t)^2} = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}$$

Por lo tanto $f(t) = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}$

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

Resolución del problema

$$f(t) = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}$$

Para estudiar la monotonía, calculamos primero el dominio de la función, $f(t)$.

El tiempo que tardan en llegar a destino es:
$$\begin{cases} \text{Móvil A} \rightarrow 30t = 375/2 \rightarrow t = 6'25 \text{ horas} \\ \text{Móvil B} \rightarrow 40t = 250 \rightarrow t = 6'25 \text{ horas} \end{cases}$$

Por lo tanto $f(t)$ está definida para $0 \leq t \leq 6'25$

Para estudiar la monotonía, calculo la derivada y la igualo a cero. Para después hacer el correspondiente estudio de signos.

$$f'(t) = \frac{-20000 + 5000t}{2\sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}} ; \frac{-20000 + 5000t}{2\sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}} = 0$$

$$-20000 + 5000t = 0 \rightarrow t = 4$$

b) El tiempo t que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

Estudio de la función

Colocamos en la recta real las soluciones de la derivada. $f'(t) = \frac{-20000+5000t}{2\sqrt{62500-20000t+2500t^2}}$

	0	4	6'25
$f'(t)$		-	+
$f(t)$			

$$f'(2) < 0$$

$$f'(6) > 0$$

$f(t)$ es **creciente** en $t \in (4, 6'25)$ y **decreciente** en $t \in (0, 4)$

Se observa en el cuadro que la función tiene **un mínimo relativo** en $t=4$ h, que será el **mínimo absoluto**.

Mínimo: $f(4) = \sqrt{62500 - 20000 * 4 + 2500 * 4^2} = 150$ km

Para calcular el máximo, nos fijamos que debe estar en uno de los dos extremos. Calculamos el valor de la función en ambos extremos.

$$f(0) = \sqrt{62500 - 20000 * 0 + 2500 * 0^2} = 250 \text{ km}$$

El máximo está en $t=0$

$$f(6'25) = \sqrt{62500 - 20000 * 6'25 + 2500 * 6'25^2} = 187'5 \text{ km}$$

Solución: La distancia máxima entre los móviles A y B se alcanza en $t=0$ h y es de 250 km. La mínima para $t=4$ h y es de 150 km.