

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2021



Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Teorema de Rouché (Discusión del Sistema).
- 2) Método de Gauss (Cálculo de rangos y resolución de S.C.I)
- 3) Regla de Cramer (Resolución del Sistema).

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices
- 2) Determinantes



El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + (a + 1)z = 2 \\ x + (a - 1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

Donde a es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro a .
- b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste es compatible.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 \\ 1 & a - 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 & 2 \\ 1 & a - 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de a utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a + 1 \\ 1 & a - 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4; \quad -a^2 + 4 = 0 \longrightarrow a^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3** $\longrightarrow$ **Ran(A*) = 3**

Si $a = -2$ o $a = 2$ entonces $|A| = 0$, **Ran(A) < 3** $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

$$\text{Si } a = -2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = -2$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 3.**

$$\text{Si } a = 2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes por lo que para $a = 2$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 2.**

$$\begin{cases} x + y + (a + 1)z = 2 \\ x + (a - 1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 \\ 1 & a - 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 & 2 \\ 1 & a - 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Discusión y resolución del Sistema

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -2$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $a = 2$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas

$$\begin{cases} x + y + (a + 1)z = 2 \\ x + (a - 1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 \\ 1 & a - 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 & 2 \\ 1 & a - 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste es compatible.

Puesto que para $a=2$ el sistema es Compatible Indeterminado, podemos utilizar la misma matriz escalonada que obtuvimos para discutir el sistema, para obtener las infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ z = 1; y = \lambda \end{cases} \longrightarrow x + \lambda + 3 = 2 \longrightarrow x = -1 - \lambda$$

La solución del sistema para $a = 2$ es:

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} ; \lambda \in R}$$

Resolución del Sistema

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto 2 y -2. Resolveré el sistema en función del parámetro, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -a^2 + 4$ $2a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow a = 2; a = -3/2$

OJO A LA FACTORIZACIÓN

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 4} = \frac{2a^2 - a - 6}{-a^2 + 4} = \frac{2 \cdot (a-2) \cdot (a+3/2)}{-(a+2) \cdot (a-2)} = \boxed{\frac{-(2a+3)}{(a+2)}}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 4} = \frac{-3a + 6}{-a^2 + 4} = \frac{-3 \cdot (a-2)}{-(a+2) \cdot (a-2)} = \boxed{\frac{3}{(a+2)}}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 4} = \frac{-4a + 8}{-a^2 + 4} = \frac{-4 \cdot (a-2)}{-(a+2) \cdot (a-2)} = \boxed{\frac{4}{(a+2)}}$$

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal. ¡BÚSCALO!

©Angel Cuesta Arza



Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2021



Problema 2
Geometría



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Posición relativa de 3 planos.
- 3) Teorema de Rouché.

Herramientas utilizadas:

- 1) Determinantes.
- 2) Vectores.



El enunciado

Se dan los planos: $\pi_1: x + y + z = a - 1$ $\pi_2: 2x + y + az = a$ $\pi_3: x + ay + z = 1$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a .

b) Para $a=1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .

c) Para $a=2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .

Solución:

Para determinar la posición relativa de los 3 planos, se discute el sistema en función del parámetro.

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché
Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de a utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a + 2; \quad -a^2 + 3a + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = 1$ o $a = 2$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

Resolución del problema

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\text{Si } a = 1 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}]{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A$
 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = 1$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 3**. También observamos que dos de los planos son paralelos, por tener el mismo vector normal (1,1,1).

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } a = 2 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3=F_3-F_1}]{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A$
 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes por lo que para $a = 2$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 2**.

Resolución del problema

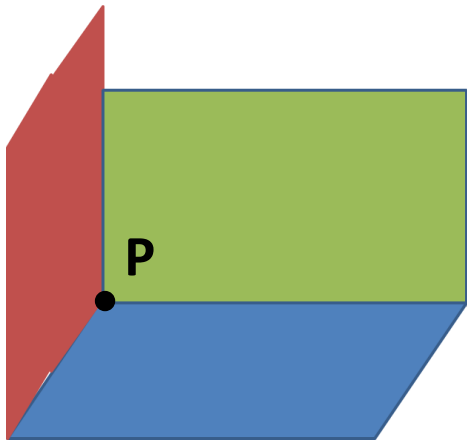
Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Posición relativa
Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$	3	3	3	S.C.D.	Secantes en un punto
Si $a = 1$	2	3	3	S.I.	Un plano es secante a dos paralelos
Si $a = 2$	2	2	3	S.C.I.	Secantes en una recta

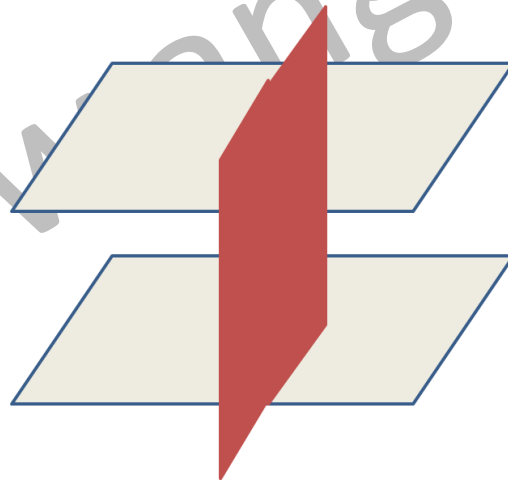
$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$



Si $a = 1$



Si $a = 2$

Resolución del problema

b) Para $a=1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . $\pi_1: x + y + z = a - 1$ $\pi_3: x + ay + z = 1$

Sustituyo por $a=1$. $\pi_1: x + y + z = 0$ $\pi_3: x + y + z = 1$

Como hemos demostrado anteriormente y como puede verse a simple vista, los dos planos son paralelos, puesto que su vector normal es el mismo, $(1,1,1)$. Por ello, **no existe una recta de corte entre ellos**.

c) Para $a=2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . $\pi_1: x + y + z = a - 1$ $\pi_2: 2x + y + az = a$

Sustituyo por $a=2$. $\pi_1: x + y + z = 1$ $\pi_3: 2x + y + 2z = 2$

Como hemos demostrado anteriormente los dos planos se cortan en una recta. Puedo expresar la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{E_2 = E_2 - 2E_1} r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Aunque no nos dicen nada, podemos expresar la ecuación de la recta en forma paramétrica

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2021



Problema 3

Análisis de funciones e integrales



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Cálculo del dominio de una función.
- 2) Cálculo de las asíntotas de una función.
- 3) Cálculo de la primitiva de una función.

Herramientas:

- 1) Límites.
- 2) Primitivas.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

El Dominio

Considerad la función $f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x+2)}$ Obtened:

- a) El dominio y las asíntotas de la función.
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) La integral $\int f(x)dx$.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x \cdot (x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ lo cual implica que el Dominio es:}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

Y ahora calcularemos las asíntotas.

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x=0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{-1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 0 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x=-2; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{-3}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ luego } \boxed{y = 0 \text{ es A.H. de } f(x)}$$

Estudio de la monotonía

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 2x) - (x-1) \cdot (2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 2x + 2x + 2 + 2}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2} = 0 \longrightarrow -x^2 + 2x + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{3} \approx 2'73 \\ x_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0'73 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-2	$1 - \sqrt{3}$	0	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+	+	-
$f(x)$						

$f(x)$ es **decreciente** en $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$ y **creciente** en $x \in (1 - \sqrt{3}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{3})$.

Calculo de la integral

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x+2)}$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{x-1}{x \cdot (x+2)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x+2} dx = A \int \frac{1}{x} dx + B \int \frac{1}{x+2} dx$$

Estamos ante una integral racional. Debemos aplicar una factorización lineal al cociente.

Calculo los valores de A y B.

$$\frac{x-1}{x \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} + \frac{B \cdot x}{x \cdot (x+2)} \longrightarrow x-1 = A \cdot (x+2) + B \cdot x$$

Se dan los valores de las raíces.

$$\text{Si } x=0 \longrightarrow -1 = 2A \longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x=-2 \longrightarrow -3 = -2B \longrightarrow B = \frac{3}{2}$$

Quedando la integral:

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{x+2} dx = \boxed{-\frac{1}{2} \cdot \ln|x| + \frac{3}{2} \cdot \ln|x+2| + C}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2021



Problema 4

Álgebra matricial



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Rango de una matriz en función de un parámetro
- 2) Invertibilidad de una matriz.
- 3) Cálculo de la matriz inversa.

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices
- 2) Determinantes



El Enunciado

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Obtener el rango de la matriz en función del parámetro m .
- b) Explicar cuando la matriz A es invertible.
- c) Resolver la ecuación $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$.

Solución:

Utilizaré el método de los adjuntos para obtener el rango de la matriz.

Calculo el determinante de A y lo igualo a cero. Desarrollo por el elemento a_{22} .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} -1 & m \\ 2 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = m \cdot (-m^2 - 2m - 1)$$

$$|A| = m \cdot (-m^2 - 2m - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -m^2 - 2m - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal. ¡BÚSCALO!

Rango de una matriz

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m .

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, entonces $|A| \neq 0$. Por ello, **Ran(A)=3**

Si $m=0$ o $m = -1$, entonces $|A| = 0$. Por ello, **Ran(A)<3**, debo comprobar en estos casos si el rango de la matriz es 1 o 2.

Si $m=0$, calculo un menor de orden 2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$ por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Si $m=-1$, calculo un menor de orden 2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$ por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Resumiendo:

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, **Ran(A)=3**

Si $m=0$ o $m = -1$, **Ran(A)=2**

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

Para que una matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero.

Por lo visto anteriormente, para que la matriz sea invertible, $m \neq 0$ y $m \neq -1$

Resolución de una ecuación matricial

c) Resolved la ecuación $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$.

Sustituimos $m=1$ en la matriz A :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos a continuación la matriz X , utilizando la matriz inversa de A . Podemos hacer esto porque acabamos de demostrar que para $m=1$, dicha matriz existe.

$$X \cdot A = I \longrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \longrightarrow X \cdot I = A^{-1} \longrightarrow X = A^{-1}$$

Se calcula la inversa de la matriz A , en la dispositiva siguiente.

Cálculo de la matriz inversa

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -4 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow (A)^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2021



Problema 5
Geometría



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Distancia punto plano.
- 3) Punto simétrico.

Herramientas utilizadas.

- 1) Vectores.



Resolución del problema

Dados el punto $P = (1,2,3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- a) Calculad la distancia del punto P al plano π .
- b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto al plano π .
- c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π .

Solución:

Para determinar la distancia de un punto a un plano, lo más rápido es aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \boxed{\sqrt{14} \text{ unidades de longitud}}$$

Resolución del problema

Dados el punto $P = (1,2,3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

b) Calcular el punto P' que es simétrico del punto P respecto al plano π .

Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) Anotamos el vector normal del plano. $\vec{n} = (3,2,1)$

2) Definimos una recta que pasa por P y tiene por vector director al normal del plano.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. Q .

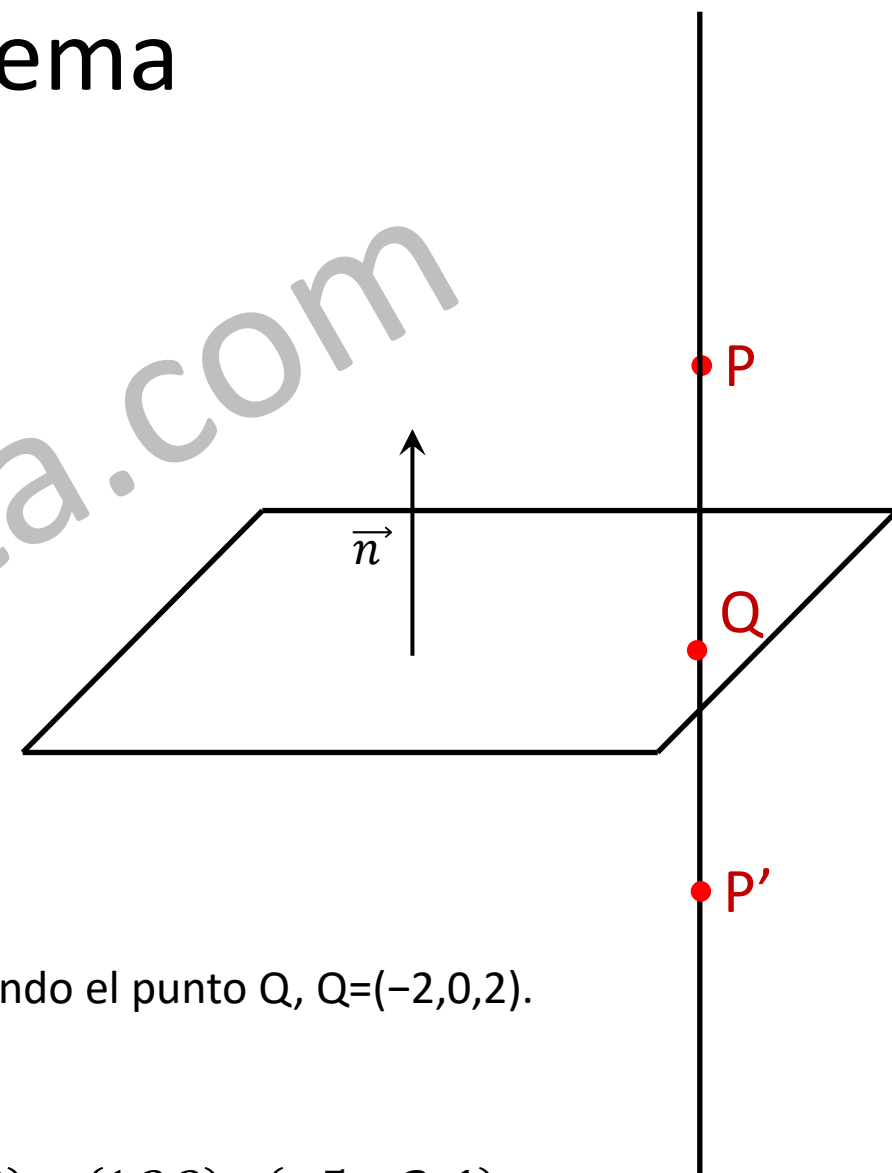
Se sustituye r en π :

$$3x + 2y + z + 4 = 0 \longrightarrow 3 \cdot (1 + 3\lambda) + 2 \cdot (2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4 = 0$$

$$3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4 = 0 \longrightarrow 14\lambda + 14 = 0 \longrightarrow \lambda = -1 \quad \text{Siendo el punto } Q, Q=(-2,0,2).$$

4) Se calcula el punto simétrico de P respecto de Q .

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \longrightarrow Q - P = P' - Q \longrightarrow P' = 2Q - P \longrightarrow P' = 2 \cdot (-2,0,2) - (1,2,3) = (-5, -2, 1)$$



El punto simétrico, es $P' = (-5, -2, 1)$

Resolución del problema

Dados el punto $P = (1,2,3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

c) **Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π .**

Recordamos que $P' = (-5, -2, 1)$

Puesto que el plano π' es paralelo a π , tiene el mismo vector normal, $\vec{n} = (3, 2, 1)$

Puedo calcular directamente la ecuación del plano pedido: $\pi': A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$

Sustituyendo: $\pi': 3 \cdot (x + 5) + 2 \cdot (y + 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0$

$$\pi': 3x + 15 + 2y + 4 + z - 1 = 0$$

$$\pi': 3x + 2y + z + 18 = 0$$

*El plano pedido es, **$\pi': 3x + 2y + z + 18 = 0$***

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2021



Problema 6

Problema de optimización



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Optimización de funciones.
- 2) Estudio de la monotonía.

Herramientas utilizadas:

- 1) Funciones.
- 2) Derivadas.



Obteniendo una función

Un espejo plano, cuadrado de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el rectángulo (x,y) (véase la figura).

- Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leq x \leq 32$.
- Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.
- Calculad el valor de dicha área máxima.

Solución:

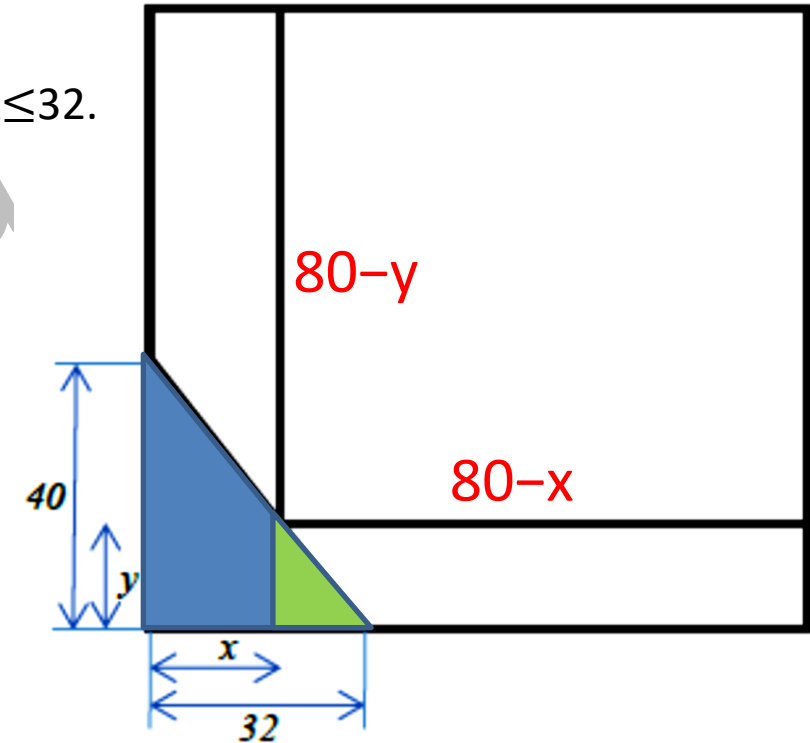
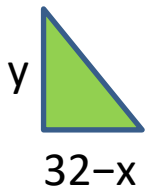
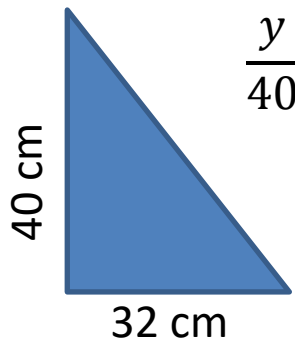
El área del rectángulo R es: $A = (80 - x) \cdot (80 - y)$

Debemos relacionar ambas variables. Lo hacemos mediante semejanza de triángulos.

$$\frac{y}{40} = \frac{32 - x}{32} \longrightarrow y = 40 \cdot \left(\frac{32 - x}{32} \right) \longrightarrow y = 40 - 1'25x$$

El área del rectángulo R es: $A(x) = (80 - x) \cdot [80 - (40 - 1'25x)]$

Operando: $A(x) = -1'25x^2 + 60x + 3200$



Optimizando la función

d) ~~Calcular el valor de dicha área máxima~~ **Calcular el valor de dicha área máxima R. para que su área sea máxima.** $A(x) = -1'25x^2 + 60x + 3200$

Como se puede ver, la función a optimizar es una función cuadrática. Al ser negativo el coeficiente del término cuadrático, podemos afirmar que el máximo estará en el vértice de esa función.

Aunque podría calcular el máximo utilizando la fórmula del vértice, en este caso lo haré mediante la derivada.

$$A'(x) = -2'5x + 60 \longrightarrow -2'5x + 60 = 0 \longrightarrow x = 24$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en $x=24$

$$A''(x) = -2'5 \longrightarrow A''(24) = -2'5 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en $x=24$ hay un máximo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

Se calcula ahora el valor de y . $y = 40 - 1'25x \longrightarrow y = 40 - 1'25 \cdot 24 = 10$

Por ello, las medidas del rectángulo R, serán:

$$\begin{cases} 80 - x = 80 - 24 = \mathbf{56\text{ cm}} \\ 80 - y = 80 - 10 = \mathbf{70\text{ cm}} \end{cases}$$

Las dimensiones de R para que su área sea máxima son: **Base= 56 cm y altura 70 cm.**

Y ahora calculamos el área máxima tal como pide el último apartado.

$$A(24) = -1'25 \cdot 24^2 + 60 \cdot 24 + 3200 = \mathbf{3920\text{ cm}^2}.$$

El área de este rectángulo es: **3920 cm².**