Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Junio 2021

Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Teorema de Rouché (Discusión del Sistema).
2) Método de Gauss (Cálculo de rangos y resolución de S.C.I)
3) Regla de Cramer (Resolución del Sistema).

Herramientas utilizadas:

1) Matrices
2) Determinantes

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + (\boldsymbol{a} + \mathbf{1})z = 2 \\ x + (\boldsymbol{a} - \mathbf{1})y + 2z = 1 \\ 2x + \mathbf{a}y + z = -1 \end{cases}$ Donde $\boldsymbol{a}$ es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro **a**.

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste es compatible.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} + \mathbf{1} \\ 1 & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} & 2 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} + \mathbf{1} & 2 \\ 1 & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de $\boldsymbol{a}$ utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} + \mathbf{1} \\ 1 & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} & 2 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4;\ -a^2 + 4 = 0 \longrightarrow a^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ entonces $|A| \neq 0$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$ $\longrightarrow$ $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$

Si $a = -2$ o $a = 2$ entonces $|A| = 0$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3}$ $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de $\boldsymbol{a}$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

$$\begin{cases} x+y+(\boldsymbol{a+1})z=2\\ x+(\boldsymbol{a-1})y+2z=1\\ 2x+\mathbf{a}y+z=-1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a+1}\\ 1 & \boldsymbol{a-1} & 2\\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a+1} & 2\\ 1 & \boldsymbol{a-1} & 2 & 1\\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $a=-2 \longrightarrow A^*=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \mathbf{-1}\\ 1 & \mathbf{-3} & 2\\ 2 & \mathbf{-2} & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2\\ 1\\ -1 \end{matrix}\end{matrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{-1} & 2\\ 1 & \mathbf{-3} & 2 & 1\\ 2 & \mathbf{-2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{-2} & 1\\ 0 & -4 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \mathbf{-2}\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1\\ 0\\ 4 \end{matrix}\end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a=-2$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A})=\mathbf{2}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{Ran}(\boldsymbol{A^*})=\mathbf{3}$.

Si $a=2 \longrightarrow A^*=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2\\ 1\\ -1 \end{matrix}\end{matrix}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-5F_2} \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \mathbf{3}\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2\\ -1\\ 0 \end{matrix}\end{matrix}\right)$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes por lo que para $a=2$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A})=\mathbf{2}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{Ran}(\boldsymbol{A^*})=\mathbf{2}$.

Discusión y resolución del Sistema

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -2$ **y** $a \neq \mathbf{2}$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\boldsymbol{a} = -\mathbf{2}$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $a = \mathbf{2}$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas

$$\begin{cases} x + y + (\boldsymbol{a} + \mathbf{1})z = 2 \\ x + (\boldsymbol{a} - \mathbf{1})y + 2z = 1 \\ 2x + \mathbf{a}y + z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a}+\mathbf{1} \\ 1 & \boldsymbol{a}-\mathbf{1} & 2 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a}+\mathbf{1} & 2 \\ 1 & \boldsymbol{a}-\mathbf{1} & 2 & 1 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste es compatible.

Puesto que para a=2 el sistema es Compatible Indeterminado, podemos utilizar la misma matriz escalonada que obtuvimos para discutir el sistema, para obtener las infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ \quad -z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ z = 1; y = \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \longrightarrow x + \boldsymbol{\lambda} + 3 = 2 \longrightarrow x = -1 - \boldsymbol{\lambda}$$

La solución del sistema para $a = 2$ es: $\boxed{\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad ; \lambda \in R \\ z = 1 \end{cases}}$

Resolución del Sistema

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto 2 y −2. Resolveré el sistema en función del parámetro, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -a^2 + 4$ $\qquad 2a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow a = 2; a = -3/2$

OJO A LA FACTORIZACIÓN

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2+4} = \frac{2a^2 - a - 6}{-a^2+4} = \frac{2 \cdot (a-2) \cdot (a+3/2)}{-(a+2) \cdot (a-2)} = \boxed{\frac{-(2a+3)}{(a+2)}}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2+4} = \frac{-3a+6}{-a^2+4} = \frac{-3 \cdot (a-2)}{-(a+2) \cdot (a-2)} = \boxed{\frac{3}{(a+2)}}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}}{-a^2+4} = \frac{-4a+8}{-a^2+4} = \frac{-4 \cdot (a-2)}{-(a+2) \cdot (a-2)} = \boxed{\frac{4}{(a+2)}}$$

$$\begin{cases} x + y + (\boldsymbol{a} + \mathbf{1})z = 2 \\ x + (\boldsymbol{a} - \mathbf{1})y + 2z = 1 \\ 2x + \mathbf{a}y + z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a}+\mathbf{1} \\ 1 & \boldsymbol{a}-\mathbf{1} & 2 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a}+\mathbf{1} & 2 \\ 1 & \boldsymbol{a}-\mathbf{1} & 2 & 1 \\ 2 & \boldsymbol{a} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal. ¡BÚSCALO!