Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Junio 2021

Problema 2

Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Posición relativa de 3 planos.
3) Teorema de Rouché.

Herramientas utilizadas:

1) Determinantes.
2) Vectores.

El enunciado

Se dan los planos: $\pi_1: x+y+z=a-1$ $\pi_2: 2x+y+az=a$ $\pi_3: x+ay+z=1$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

b) Para a=1, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3.

c) Para a=2, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2.

Solución:

Para determinar la posición relativa de los 3 planos, se discute el sistema en función del parámetro.

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & \boldsymbol{a}\\ 1 & \boldsymbol{a} & 1\end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \boldsymbol{a-1}\\ 2 & 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de $\boldsymbol{a}$ utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & \boldsymbol{a}\\ 1 & \boldsymbol{a} & 1\end{vmatrix} = -a^2+3\text{a}+2;\ -a^2+3\text{a}+2=0 \longrightarrow \begin{cases}a=1\\ a=2\end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ entonces $|A| \neq 0$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3} \longrightarrow$ $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$

Si $a = 1$ o $a = 2$ entonces $|A| = 0$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3} \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

Resolución del problema

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de ***a***. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{a-1} \\ 2 & 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } a=1 \longrightarrow A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \end{matrix}}_{A}\;\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\text{F}_3=\text{F}_3-2\text{F}_1]{\text{F}_2=\text{F}_2-2\text{F}_1} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\;\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a=1$, **Ran**$(\boldsymbol{A})=\mathbf{2}\ \boldsymbol{y}$ **Ran**$(\boldsymbol{A}^*)=\mathbf{3}$. También observamos que dos de los planos son paralelos, por tener el mismo vector normal (1,1,1).

$$\text{Si } a=2 \longrightarrow A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A}\;\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\text{F}_3=\text{F}_3-\text{F}_1]{\text{F}_2=\text{F}_2-2\text{F}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F}_3=\text{F}_3-\text{F}_2} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\;\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes por lo que para $a=2$, **Ran**$(\boldsymbol{A})=\mathbf{2}\ \boldsymbol{y}$ **Ran**$(\boldsymbol{A}^*)=\mathbf{2}$.

Resolución del problema

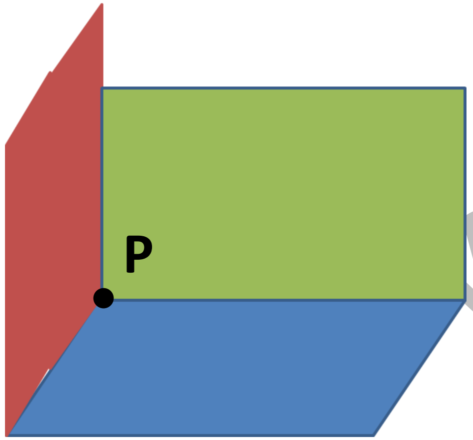
Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Posición relativa
Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$	3	3	3	S.C.D.	Secantes en un punto
Si $a = 1$	2	3	3	S.I.	Un plano es secante a dos paralelos
Si $a = 2$	2	2	3	S.C.I.	Secantes en una recta

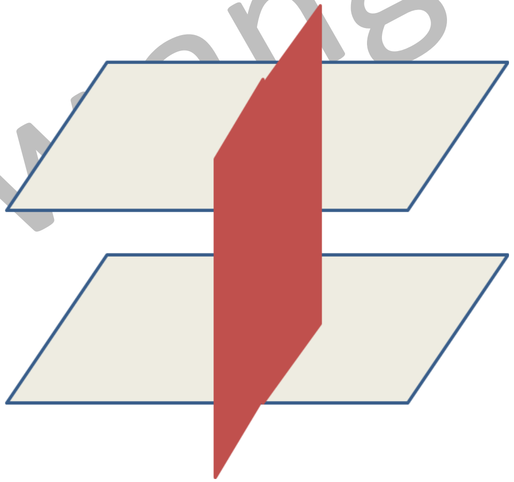
$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{a-1} \\ 2 & 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Si $a \neq \mathbf{1}$ y $a \neq \mathbf{2}$



Si $a = \mathbf{1}$

Si $a = \mathbf{2}$

Resolución del problema

b) Para a=1, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3. $\pi_1: x + y + z = a - 1$ $\pi_3: x + ay + z = 1$

Sustituyo por a=1. $\pi_1: x + y + z = 0$ $\pi_3: x + y + z = 1$

Como hemos demostrado anteriormente y como puede verse a simple vista, los dos planos son paralelos, puesto que su vector normal es el mismo, (1,1,1). Por ello, **no existe una recta de corte entre ellos**.

c) Para a=2, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2. $\pi_1: x + y + z = a - 1$ $\pi_2: 2x + y + az = a$

Sustituyo por a=2. $\pi_1: x + y + z = 1$ $\pi_3: 2x + y + 2z = 2$

Como hemos demostrado anteriormente los dos planos se cortan en una recta. Puedo expresar la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

$$\boxed{r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}} \xrightarrow{E_2 = E_2 - 2E_1} r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Aunque no nos dicen nada, podemos expresar la ecuación de la recta en forma paramétrica