Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Junio 2021

Problema 3

Análisis de funciones e integrales

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Cálculo del dominio de una función.
2) Cálculo de las asíntotas de una función.
3) Cálculo de la primitiva de una función.

Herramientas:

1) Límites.
2) Primitivas.

El Enunciado

Dominio

Considerad la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x \cdot (x+2)}$ Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

c) La integral $\int f(x)dx$.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x \cdot (x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{-2, 0\}}}$

Y ahora calcularemos las asíntotas.

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=0; $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \frac{-1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}, luego \boxed{\boldsymbol{x = 0\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

En x= −2; $\lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \frac{-3}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases}, luego \boxed{\boldsymbol{x = -2\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, luego \boxed{\boldsymbol{y = 0\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$

Estudio de la monotonía

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+2x)-(x-1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{x^2+2x-2x^2-2x+2x+2+2}{(x^2+2x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2} = 0 \longrightarrow -x^2+2x+2=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{3} \approx 2'73 \\ x_2 = 1-\sqrt{3} \approx -0'73 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ a -2	-2 a $1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$ a 0	0 a $1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$ a $+\infty$
f'(x)	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
f(x)	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-2) \cup \left(-2,1-\sqrt{3}\right) \cup \left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$ y **creciente** en $x\epsilon\left(1-\sqrt{3},0\right) \cup \left(0,1+\sqrt{3}\right)$.

Calculo de la integral

$$f(x)=\frac{x-1}{x\cdot(x+2)}$$

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{x-1}{x\cdot(x+2)}\,dx=\int\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}\,dx=\int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x+2}\,dx=A\int\frac{1}{x}\,dx+B\int\frac{1}{x+2}\,dx$$

Estamos ante una integral racional. Debemos aplicar una factorización lineal al cociente.

Calculo los valores de A y B.

$$\frac{x-1}{x\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\cdot(x+2)}{x\cdot(x+2)}+\frac{B\cdot x}{x\cdot(x+2)}\longrightarrow x-1=A\cdot(x+2)+B\cdot x$$

Se dan los valores de las raíces.

Si x=0 $\longrightarrow -1=2A\longrightarrow A=-\frac{1}{2}$

Si x=−2 $\longrightarrow -3=-2B\longrightarrow B=\frac{3}{2}$

Quedando la integral:

$$\int f(x)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{3}{2}\cdot\int\frac{1}{x+2}\,dx=\boxed{-\frac{1}{2}\cdot Ln|x|+\frac{3}{2}\cdot Ln|x+2|+C}$$