Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Junio 2021

Problema 4
Álgebra matricial

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Rango de una matriz en función de un parámetro
2) Invertibilidad de una matriz.
3) Cálculo de la matriz inversa.

Herramientas utilizadas:

1) Matrices
2) Determinantes

El Enunciado

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

c) Resolved la ecuación X·A=I, donde I es la matriz identidad en el caso m=1.

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal. ¡BÚSCALO!

Solución:

Utilizaré el método de los adjuntos para obtener el rango de la matriz.

Calculo el determinante de A y lo igualo a cero. Desarrollo por el elemento a_{22}.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{vmatrix}=\mathrm{m}\cdot\begin{vmatrix}-1 & m\\ 2 & m^2+1\end{vmatrix}=\mathrm{m}\cdot(-m^2-2m-1)$$

$$|A|=\mathrm{m}\cdot(-m^2-2m-1)=0\longrightarrow\begin{cases}m=0\\ -m^2-2m-1=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}m=0\\ m=-1\end{cases}$$

Rango de una matriz

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

Si m≠0 y m $\neq -1$, entonces $|A|$ ≠0. Por ello, **Ran(A)=3**

Si m=0 o m $= -1$, entonces $|A|$ =0. Por ello, **Ran(A)<3,** debo comprobar en estos casos si el rango de la matriz es 1 o 2.

Si m=0, calculo un menor de orden 2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$ por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Si m=−1, calculo un menor de orden 2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$ por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Resumiendo:

Si m≠0 y m $\neq -1$, **Ran(A)=3**
Si m=0 o m $= -1$, **Ran(A)=2**

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

Para que una matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero.

Por lo visto anteriormente, para que la matriz sea invertible, m≠0 y m $\neq -1$

Resolución de una ecuación matricial

c) Resolved la ecuación X·A=I, donde I es la matriz identidad en el caso m=1.

Sustituimos m=1 en la matriz A: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Despejamos a continuación la matriz X, utilizando la matriz inversa de A. Podemos hacer esto porque acabamos de demostrar que para m=1, dicha matriz existe.

$$X \cdot A = I \longrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \longrightarrow X \cdot I = A^{-1} \longrightarrow X = A^{-1}$$

Se calcula la inversa de la matriz A, en la dispositiva siguiente.

Cálculo de la matriz inversa

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $\quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -4 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $(A)^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t \longrightarrow (A)^{-1} = \dfrac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$$