Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Junio 2021

Problema 6

Problema de optimización

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Optimización de funciones.
2) Estudio de la monotonía.

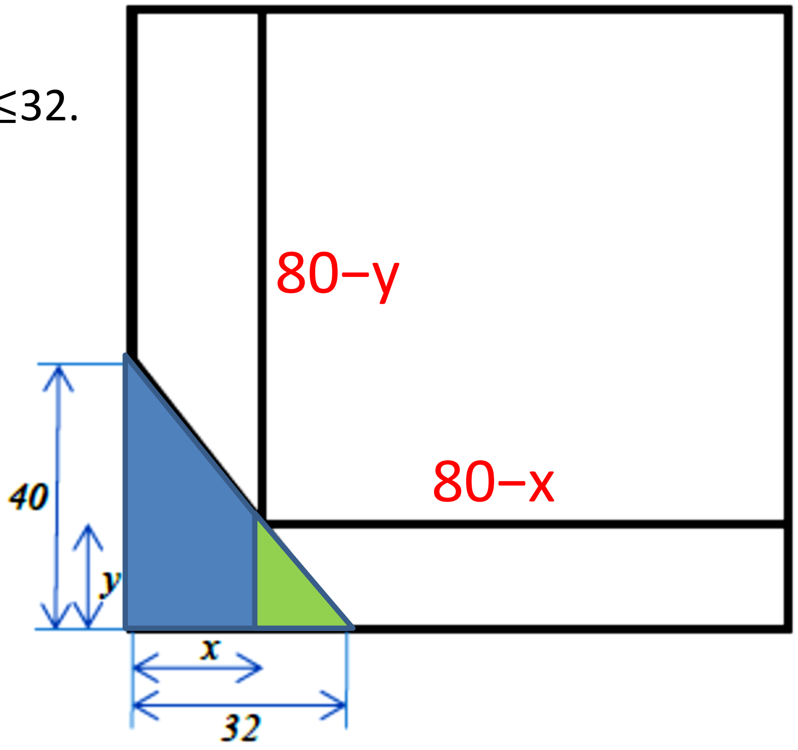
Herramientas utilizadas:

1) Funciones.
2) Derivadas.

Obteniendo la función

El enunciado

Un espejo plano, cuadrado de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el rectángulo (x,y) (véase la figura).



a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leq x \leq 32$.

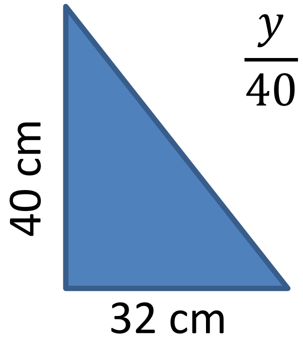
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

c) Calculad el valor de dicha área máxima.

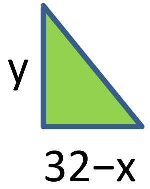
Solución:

El área del rectángulo R es: $A = (80 - x) \cdot (80 - y)$

Debemos relacionar ambas variables. Lo hacemos mediante semejanza de triángulos.



$$\frac{y}{40} = \frac{32 - x}{32} \longrightarrow y = 40 \cdot \left(\frac{32 - x}{32}\right) \longrightarrow y = 40 - 1'25x$$



El área del rectángulo R es: $A(x) = (80 - x) \cdot [80 - (40 - 1'25x)]$

Operando: $\boxed{A(x) = -1'25x^2 + 60x + 3200}$

Optimizando la función

c) Calcula las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. $A(x) = -1'25x^2 + 60x + 3200$

d) Calcula el valor de dicha área máxima.

Como se puede ver, la función a optimizar es una función cuadrática. Al ser negativo el coeficiente del término cuadrático, podemos afirmar que el máximo estará en el vértice de esa función.

Aunque podría calcular el máximo utilizando la fórmula del vértice, en este caso lo haré mediante la derivada.

$$A'(x) = -2'5x + 60 \longrightarrow -2'5x + 60 = 0 \longrightarrow x = 24$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en x=24

$$A''(x) = -2'5 \longrightarrow A''(24) = -2'5 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en x=24 hay un máximo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

Se calcula ahora el valor de y. $y = 40 - 1'25x \longrightarrow y = 40 - 1'25 \cdot 24 = 10$

Por ello, las medidas del rectángulo R, serán: $\begin{cases} 80 - x = 80 - 24 = \mathbf{56\ cm} \\ 80 - y = 80 - 10 = \mathbf{70\ cm} \end{cases}$

Las dimensiones de R para que su área sea máxima son: **Base= 56 cm y altura 70 cm.**

Y ahora calculamos el área máxima tal como pide el último apartado.

$$A(24) = -1'25 \cdot 24^2 + 60 \cdot 24 + 3200 = \mathbf{3920\ cm^2}.$$

El área de este rectángulo es: **3920 $\mathbf{cm^2}$.**