

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 1

Álgebra matricial



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Álgebra matricial. Matriz inversa.
- 2) Método de inducción.

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices y determinantes.

Problema 1

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Se pide:

- a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla.
- b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad.
- c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n

Solución:

Para que una matriz tenga inversa debe ser regular. Debe ser cuadrada y su determinante debe ser distinto de cero.

Se calcula el valor de $C - AB^T$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como se puede ver, la matriz es cuadrada. Falta comprobar si su determinante es distinto de cero.

$$\text{Se el valor del determinante. } |C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Se comprueba que la matriz tiene inversa. Continúo con su cálculo en la siguiente diapositiva.

Problema 1

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0 \rightarrow$ La matriz tiene inversa

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(C - AB^T) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(C - AB^T))^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{|C - AB^T|} (Adj(C - AB^T))^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Problema 1

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad.

Se despeja X utilizando las propiedades de las matrices.

$$CX = AB^T X + I \longrightarrow CX - AB^T X = I \longrightarrow (C - AB^T) \cdot X = I \longrightarrow (C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T) \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \cdot I$$

$$(C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T) \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \cdot I \longrightarrow I \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \longrightarrow X = (C - AB^T)^{-1}$$

Puesto que ya se ha calculado antes la matriz inversa, ya disponemos de la matriz X .

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Problema 1

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n

En el apartado a) se calculó la matriz AB^T . $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

Se aplica el método de inducción. Dicho método de demostración consiste en verificar que se cumple la expresión dada para $n=1$, y además en demostrar que se verifica para $n+1$, suponiendo que para n es válida.

Verifico para $n=1$. $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

Escribo la expresión para $n+1$. $(AB^T)^{n+1} = 2^{n+1} \cdot I$

Desarrollo la expresión aplicando las propiedades de las matrices y de las potencias.

$$(AB^T)^{n+1} = 2^{n+1} \cdot I \longrightarrow (AB^T)^n \cdot (AB^T) = 2^{n+1} \cdot I \longrightarrow (AB^T)^n \cdot (AB^T) = 2^n \cdot 2I \longrightarrow (AB^T)^n \cdot 2I = 2^n \cdot 2I$$

$(AB^T)^n = 2^n I$ Al simplificar, nos queda la expresión que suponemos que es válida, por lo que la expresión queda demostrada por el método de inducción.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 2

Matrices y determinantes

©Angel Cuesta Arza



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Rango e inversa de una matriz.
- 2) Propiedades de los determinantes.

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices.
- 2) Determinantes.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$

Determinar:

- a) El rango de la matriz A en función del parámetro m.
- b) La matriz inversa de A en el caso de m=2.
- c) El número real m para el cual el determinante de la matriz 2A es igual a -8.

Solución: Se utiliza el método de los menores para calcular el rango de A

Se calcula el determinante de A y se iguala a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = -3m^3 + 2m^2 = m^2 \cdot (-3m + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2/3 \end{cases}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2/3$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3**

Si $m = 0$ o $m = 2/3$ entonces $|A| = 0$, **Ran(A) < 3**

Debo calcular el rango de A sustituyendo los valores de a en las matrices.

Problema 2

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyo por los valores obtenidos anteriormente.

$$\text{Si } m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que si $m=0$, el rango de A es 1.

$$\text{Si } m = 2/3 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 4/9 & 1 \\ 0 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, es más rápido calcular el valor de un menor y comprobar que es distinto de cero.

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 4/9 & 1 \\ 4/3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \neq 0 \quad \text{Se demuestra que si } m=2/3, \text{ el rango de } A \text{ es 2.}$$

Solución:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2/3$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3**

Si $m = 0$, **Ran(A) = 1**

Si $m = 2/3$, **Ran(A) = 2**

Problema 2

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz inversa de A en el caso de m=2. Sustituyo por m=2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 16 + 0 - 0 - 0 - 8 = -16 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-16} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 2

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 .

Recordamos que ya conocemos el valor del determinante de A en función de m . $|A| = -3m^3 + 2m^2$

Para calcular el determinante de $2A$, aplico la propiedad de los determinantes que dice que: $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$

Donde n es el número de filas o columnas del determinante.

$$|2 \cdot A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot |A| = 8 \cdot (-3m^3 + 2m^2) = -8 \longrightarrow -3m^3 + 2m^2 = -1 \longrightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$$

Para poder resolver la ecuación de tercer grado, se debe factorizar el polinomio. Lo haré aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -1 \\ \hline & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \longrightarrow (m-1) \cdot (-3m^2 - m - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ -3m^2 - m - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{m=1} \\ \nexists m \in R \end{cases}$$

Os animo a que comprobéis que la ecuación de segundo grado no tiene solución real.

El valor real que cumple lo pedido es **$m=1$** .

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 3

Geometría

©Angel Cuesta Arza



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021
Problema 2



PAU Julio 2021
Problema 5



PAU Junio 2021
Problema 2



PAU Junio 2021
Problema 5



PAU Septiembre 2020
Problema 2



PAU Septiembre 2020
Problema 5



PAU Julio 2020
Problema 2

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Posición relativa de dos rectas.

Herramientas utilizadas.

- 1) Matrices.
- 2) Determinantes



PROBLEMA 3

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$

- a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s .
- b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s .

Solución:

Para determinar la posición relativa de las 2 rectas, calculo un punto y un vector director de cada una de ellas.

Lo más cómodo es expresar las ecuaciones de las rectas " r " y " s " en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de forma sencilla.

Dado que la z es la única incógnita que se repite, se asigna un parámetro a dicha incógnita en cada recta.

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1, 2, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = 4 - 5\mu \\ y = -3 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases} ; \mu \in \mathbb{R} \quad \text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

PROBLEMA 3

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1, 2, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, 1) \end{cases}$$

Se define una matriz con los vectores directores y se calcula su rango. $V = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Se calcula el rango mediante el método de los menores, orlando la matriz.

$$\text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot (-5) = -11 \neq 0$ Al ser el menor distinto de cero, $\text{Rg}(V)=2$, y eso significa que los dos vectores no son paralelos, por lo que las rectas **son secantes o se cruzan**.

Se define una matriz con los vectores directores y con el vector que va de un punto P de la recta r a un punto Q de la recta s.

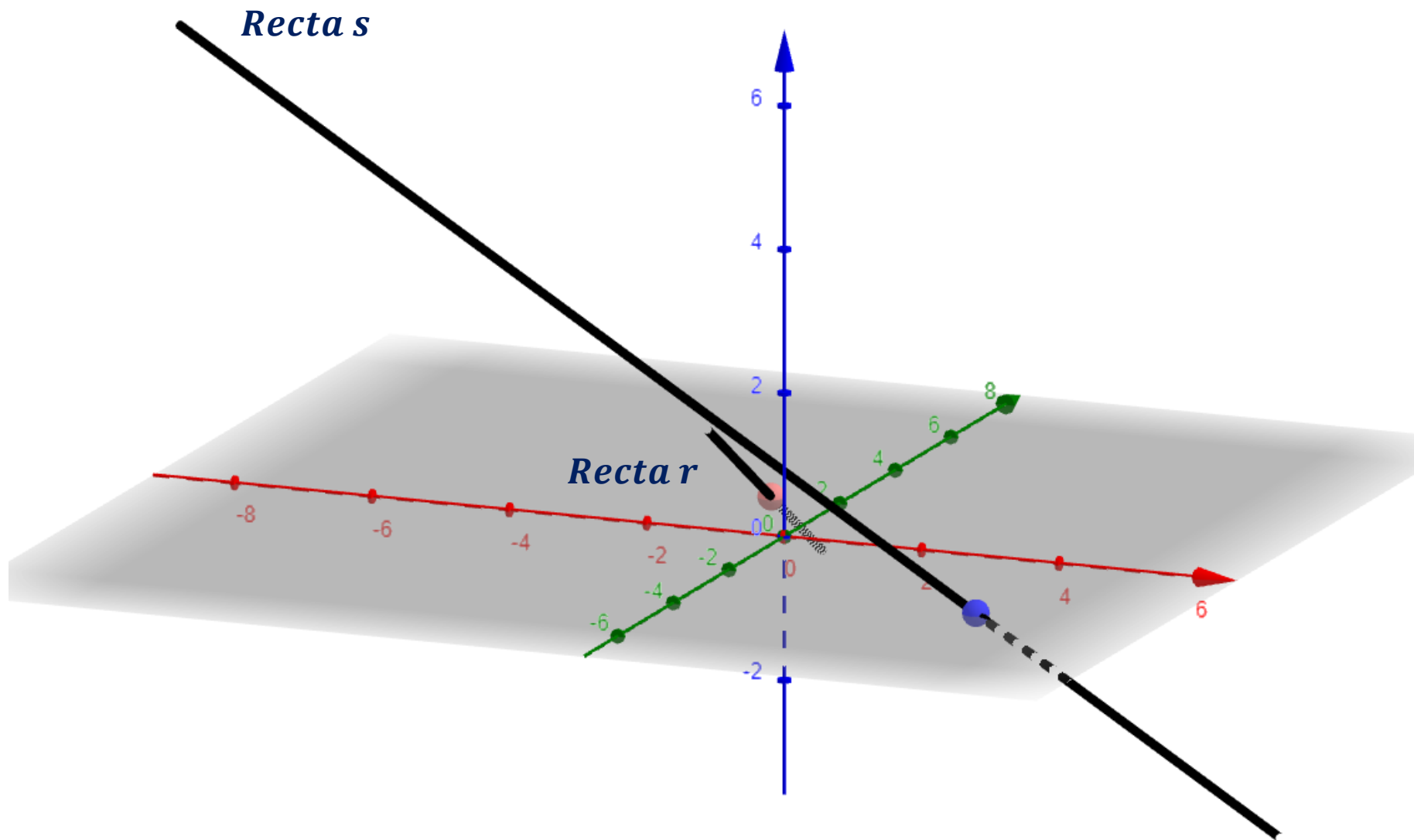
$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4, -3, 0) - (-1, 2, 0) = (5, -5, 0)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ Se calcula el rango mediante el método de los menores.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero, $\text{Rg}(A)=3$, por lo que las rectas **se cruzan**.

PROBLEMA 3



Como puedes comprobar, **se cruzan**.

PROBLEMA 3

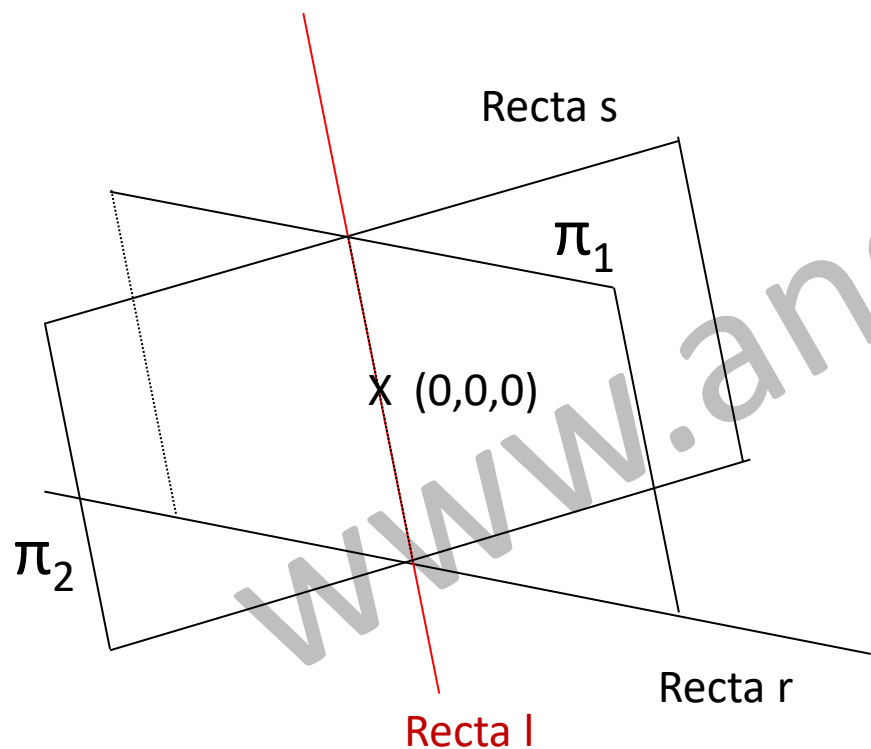
$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1, 2, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, 1) \end{cases}$$

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s .

$$\text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

Nos encontramos ante un problema que se suele titular de la siguiente forma:
“recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos”.

Para entender mejor el ejercicio, es conveniente hacer un esquema.



Se define π_1 , el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a r .

Se define π_2 , el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a s .

La intersección de ambos planos, es la recta pedida.

Una vez entendido el problema, vamos a hacer los cálculos.

PROBLEMA 3

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1, 2, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, 1) \end{cases} \quad \text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

Calculo π_1 , el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a r.

Para ello necesitamos un punto y dos vectores directores.

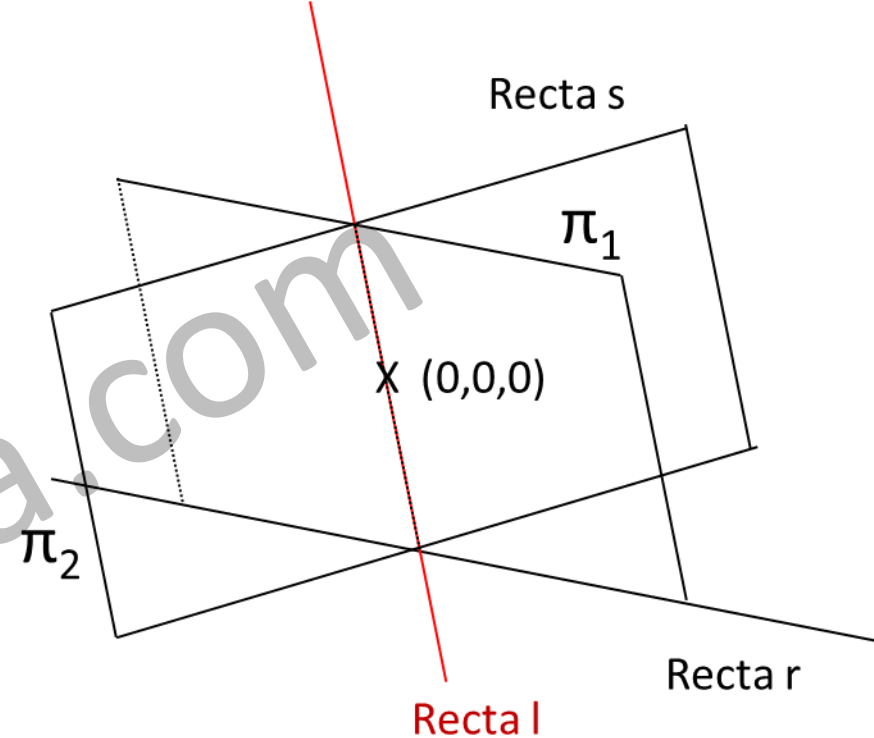
Disponemos de forma directa de un punto y de un vector director. Debemos hallar el otro vector director del plano. Dicho vector será el que una un punto cualquiera de la recta r con el punto O.

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (-1, 2, 0) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 0)$$

Se calcula la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2z - y - (3z + 2x) = 0 \longrightarrow -2x - y - z = 0$$

$$\text{Siendo } \pi_1 \quad \pi_1 = 2x + y + z = 0$$



PROBLEMA 3

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1, 2, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, 1) \end{cases} \quad \text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

Calculo π_2 , el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a s.

Para ello necesitamos un punto y dos vectores directores.

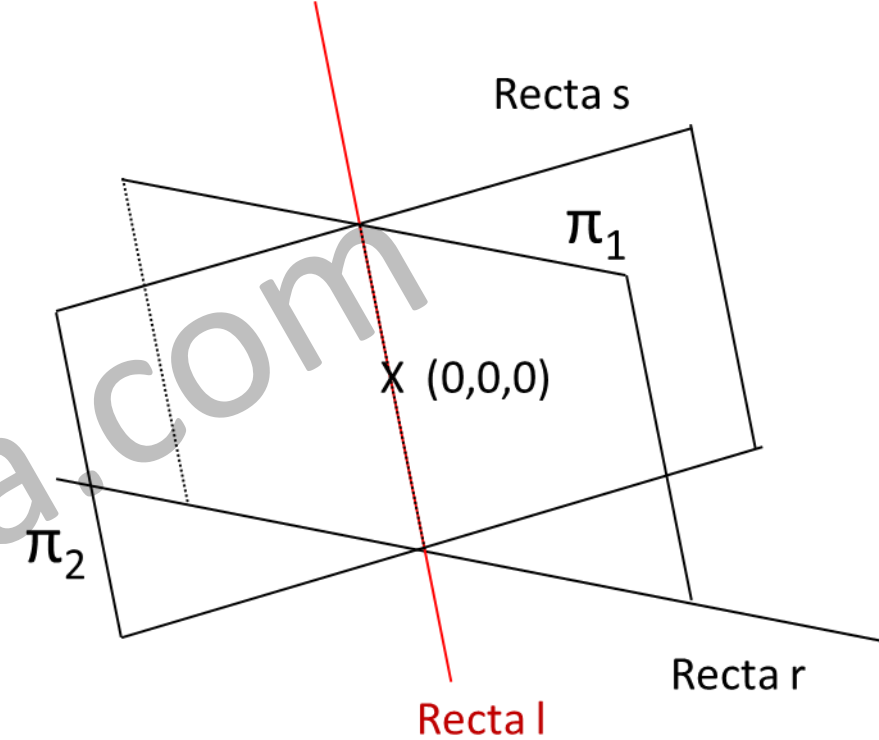
Disponemos de forma directa de un punto y de un vector director. Debemos hallar el otro vector director del plano. Dicho vector será el que una un punto cualquiera de la recta r con el punto O.

$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = (4, -3, 0) - (0, 0, 0) = (4, -3, 0)$$

Se calcula la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 15z + 4y - (16z - 3x) = 0 \longrightarrow 3x + 4y - z = 0$$

$$\text{Siendo } \pi_2 \quad \pi_2 = 3x + 4y - z = 0$$



PROBLEMA 3

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1, 2, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, 1) \end{cases} \quad \text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

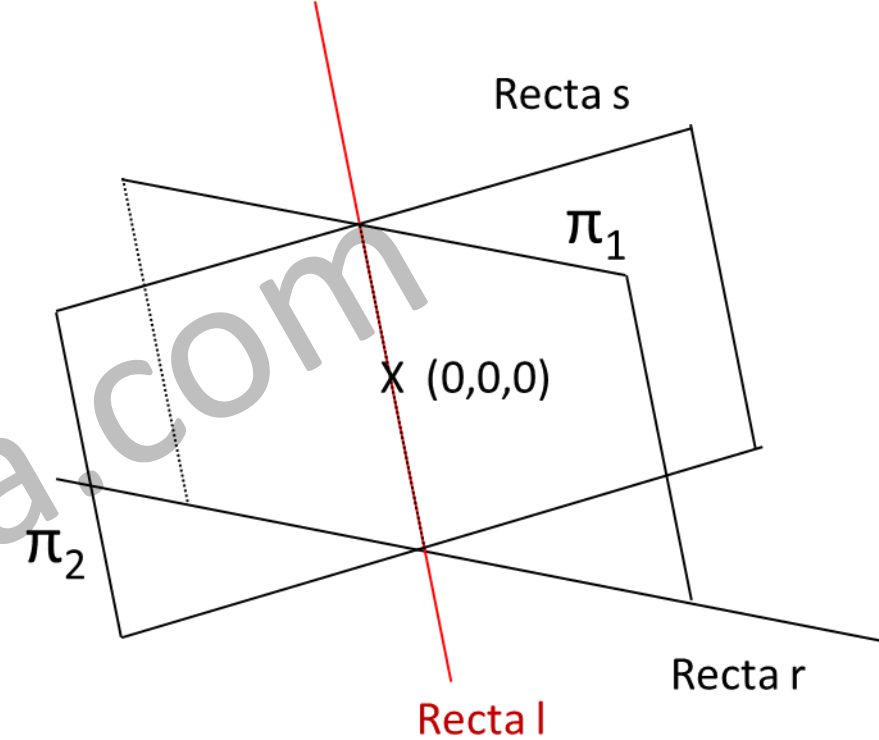
$$\pi_1 = 2x + y + z = 0 \quad \pi_2 = 3x + 4y - z = 0$$

La intersección de ambos planos, es la recta pedida. Se expresa la ecuación de dicha recta en su forma general.

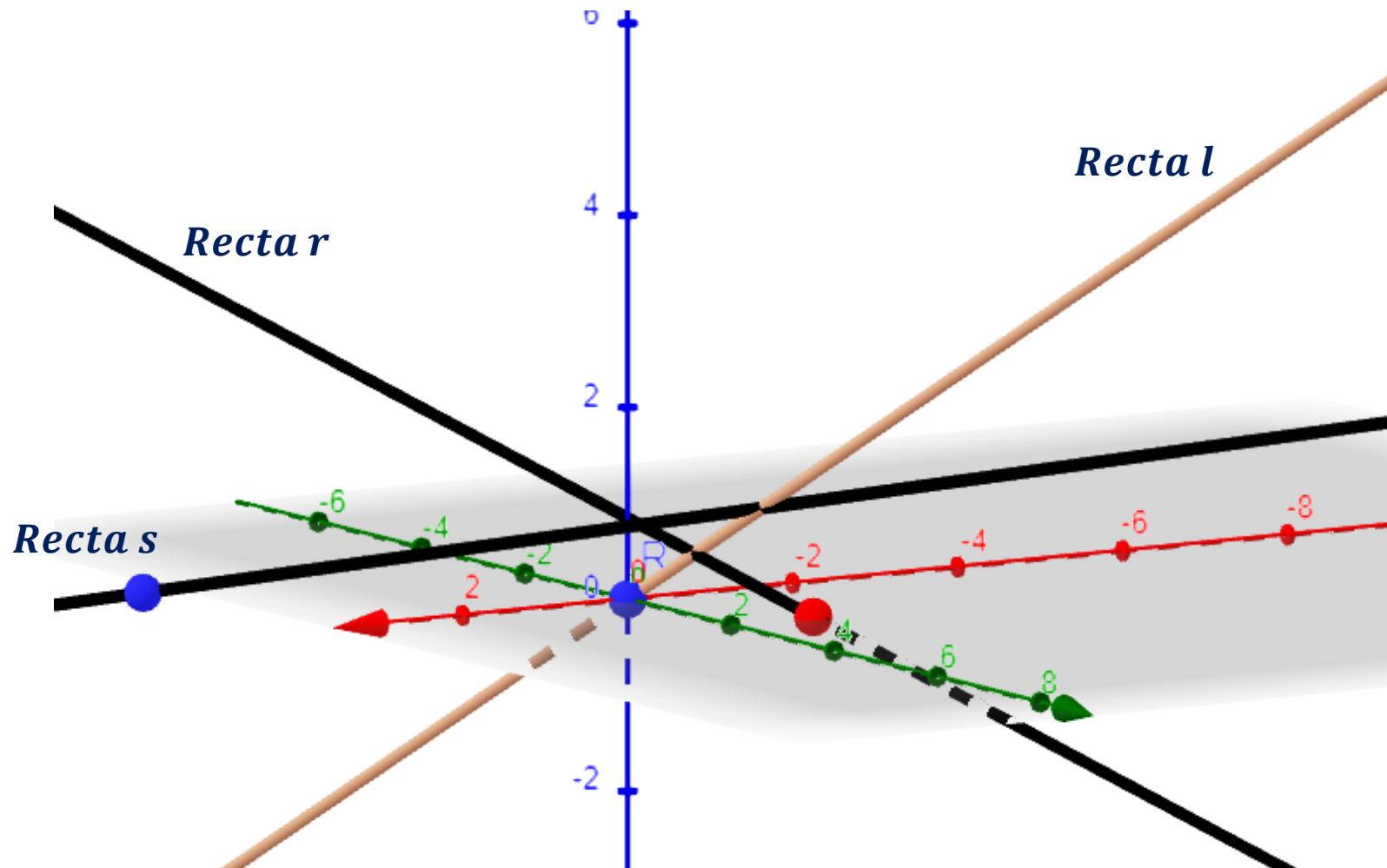
$$l: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

RETO: ¿Cuáles serían las ecuaciones paramétricas de dicha recta?

$$l: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$



PROBLEMA 3



Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 4

Geometría



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.



©Ang

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021
Problema 2



PAU Julio 2021
Problema 5



PAU Junio 2021
Problema 2



PAU Junio 2021
Problema 5



PAU Septiembre 2020
Problema 2



PAU Septiembre 2020
Problema 5



PAU Julio 2020
Problema 2

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Posición relativa de dos planos.

Herramientas utilizadas.

- 1) Determinantes



PROBLEMA 4

Dadas los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 .

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P=(1,0,0)$ respecto del plano π_1 .

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r .

Solución:

Para determinar la posición relativa de las 2 planos, debo expresar ambos en forma general.

De las ecuaciones paramétricas de π_2 se deducen un punto y dos vectores directores. $Q = (-1,1,0)$; $\vec{u} = (1,1,1)$; $\vec{v} = (0,1,-1)$

Se calcula la ecuación general de π_2 con ayuda de un determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow -2x + y + z - 3 = 0$$

Siendo $\pi_2: -2x + y + z - 3 = 0$

PROBLEMA 4

A partir de las ecuaciones generales de ambos planos deducimos su posición relativa:

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2: -2x + y + z - 3 = 0$$

Estudio la proporcionalidad de los coeficientes de las ecuaciones de los planos. $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{4}{-3}$

Pudiendo concluir que los planos π_1 y π_2 son **paralelos**.

PROBLEMA 4

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P=(1,0,0)$ respecto del plano π_1 . $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$

Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) Anotamos el vector normal del plano. $\vec{n} = (2, -1, -1)$

2) Definimos una recta que pasa por P y tiene por vector director al normal del plano.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. R .

Se sustituye r en π_1 :

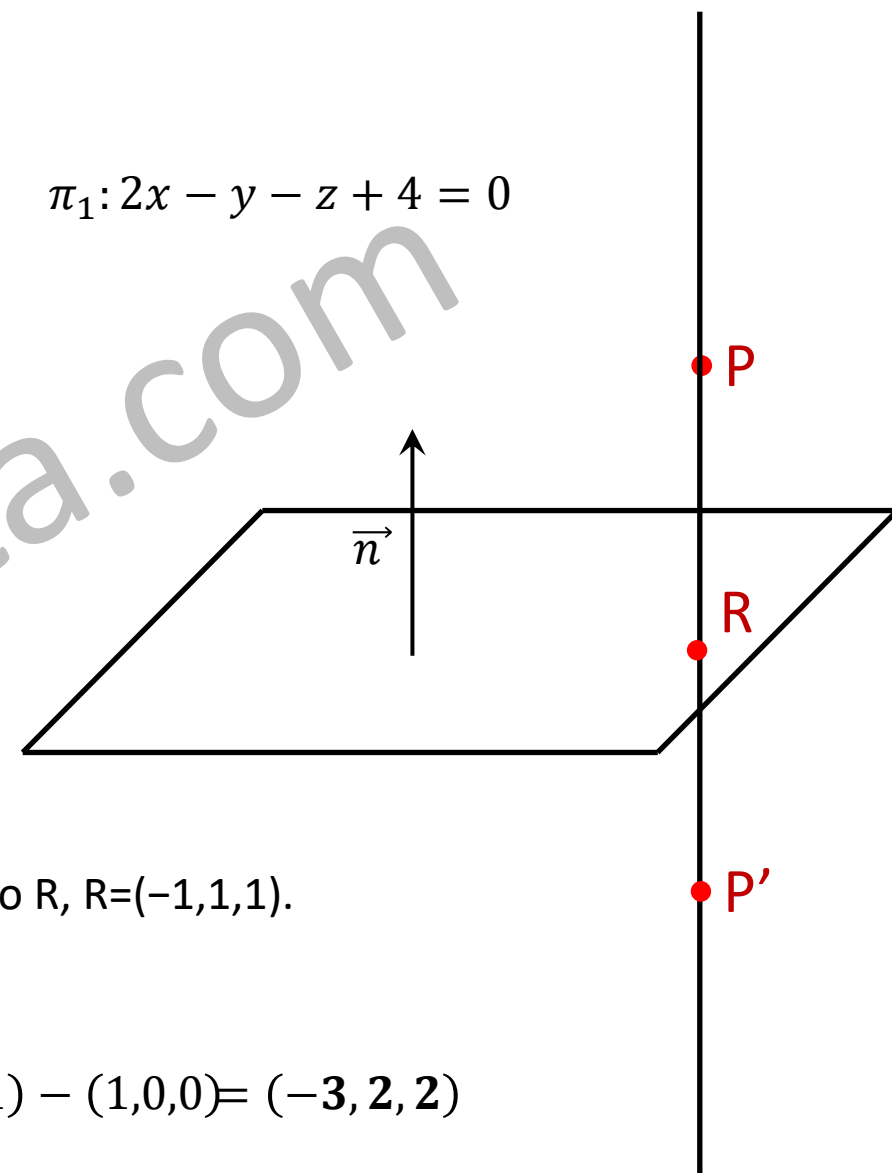
$$2x - y - z + 4 = 0 \longrightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0$$

$$2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0 \longrightarrow 6\lambda + 6 = 0 \longrightarrow \lambda = -1 \quad \text{Siendo el punto } R, R=(-1,1,1).$$

4) Se calcula el punto simétrico de P respecto de Q .

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RP'} \longrightarrow R - P = P' - R \longrightarrow P' = 2R - P \longrightarrow P' = 2 \cdot (-1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-3, 2, 2)$$

El punto simétrico, es $P' = (-3, 2, 2)$



PROBLEMA 4

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

Se expresa la recta r en forma paramétrica. $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

Se sustituyen los valores de (x,y,z) de la recta en la ecuación del plano.

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0 \longrightarrow 2 \cdot (1 + \lambda) - 2\lambda - (2 - \lambda) + 4 = 0 \longrightarrow 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0$$

$$2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda = -4$$

Se sustituye en las ecuaciones paramétricas para obtener el punto de intersección.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 - 4 = -3 \\ y = 2\lambda = 2 \cdot (-4) = -8 \\ z = 2 - \lambda = 2 - (-4) = 6 \end{cases}$$

El punto de intersección es $T = (-3, -8, 6)$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 5

Análisis de funciones e integrales



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.



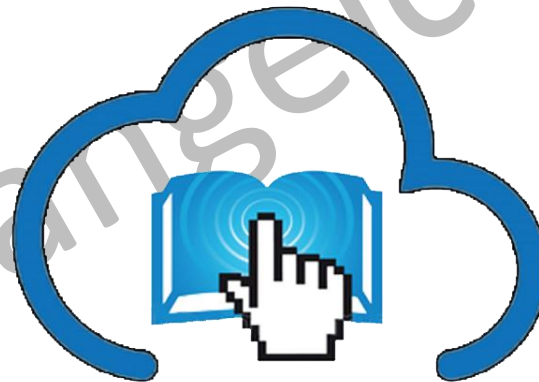
Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Cálculo del dominio de una función.
- 2) Cálculo de las asíntotas de una función.
- 3) Cálculo de la primitiva de una función.

Herramientas:

- 1) Límites.
- 2) Derivadas
- 3) Primitivas.



ÁNGEL CUESTA
Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

©Ángel Cuesta Arza

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021
Problema 3



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 5

Considerad la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$ Obtener:

- a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.
- b) Las asíntotas de la función.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos
- d) La primitiva de la función $f(x)$.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ lo cual implica que el Dominio es: } \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 3}{0^2 - 4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \rightarrow \boxed{A = \left(0, -\frac{3}{4}\right)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} = \nexists$$

La función no tiene puntos de corte con el Eje X.

Problema 5

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x=2; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x = -2; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^-} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

por lo tanto $\boxed{y = 1 \text{ es A.H. de } f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Problema 5

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

Se calcula la derivada para estudiar la monotonía de la función y sus puntos singulares.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - (x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-14x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \longrightarrow -14x = 0 \longrightarrow x = 0 \quad \text{Se estudia el signo de la derivada:}$$

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	
$f(x)$					

$f(x)$ es **decreciente** en $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ y **creciente** en $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

Se observa que el **máximo relativo** se encuentra en $x=0$, es decir, el punto de corte con el eje Y.

$$A = \left(0, -\frac{3}{4} \right)$$

Problema 5

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

Se calcula la primitiva de la función racional dada.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} dx = \int \frac{x^2 - 4 + 4 + 3}{x^2 - 4} dx = \int \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} dx + \int \frac{7}{x^2 - 4} dx = \int 1 dx + \int \frac{7}{x^2 - 4} dx$$

La segunda integral, es una integral racional en la cual el denominador tiene raíces reales simples. Aplicaré el método de factorización lineal para transformar esta integral en otras dos que si pueda integrar de forma inmediata.

$$\int \frac{7}{x^2 - 4} dx = \int \frac{7}{(x - 2) \cdot (x + 2)} dx = \int \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} dx = \int \frac{A}{x - 2} dx + \int \frac{B}{x + 2} dx = A \int \frac{1}{x - 2} dx + B \int \frac{1}{x + 2} dx$$

Calculo los valores de A y B.

$$\frac{7}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A \cdot (x + 2)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} + \frac{B \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} \longrightarrow 7 = A \cdot (x + 2) + B \cdot (x - 2)$$

Se dan los valores de las raíces.

$$\text{Si } x=2 \longrightarrow 7 = 4A \longrightarrow A = \frac{7}{4}$$

$$\text{Si } x=-2 \longrightarrow 7 = -4B \longrightarrow B = \frac{-7}{4}$$

Problema 5

Se resuelve la integral y se expresa la solución de distintas formas.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} dx = \int 1 dx + \int \frac{7}{x^2 - 4} dx = \int 1 dx + A \int \frac{1}{x - 2} dx + B \int \frac{1}{x + 2} dx$$

$$\int f(x) dx = \int 1 dx + \frac{7}{4} \cdot \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{7}{4} \cdot \int \frac{1}{x + 2} dx = x + \frac{7}{4} \cdot \ln|x - 2| - \frac{7}{4} \cdot \ln|x + 2| + C$$

$$\int f(x) dx = x + \frac{7}{4} \cdot \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C$$

$$\int f(x) dx = x + \ln \left(\left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| \right)^{\frac{7}{4}} + C$$

$$\int f(x) dx = x + \ln \left(\sqrt[4]{\left(\left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| \right)^7} \right) + C$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 6

Problema de optimización



ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel C

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021
Problema 6



PAU Junio 2021
Problema 6



PAU Septiembre 2020
Problema 6



PAU Julio 2020
Problema 6



PAU Julio 2019
Problema B3



PAU Junio 2019
Problema B3



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Optimización de funciones.
- 2) Estudio de la monotonía.

Herramientas utilizadas:

- 1) Funciones.
- 2) Derivadas.



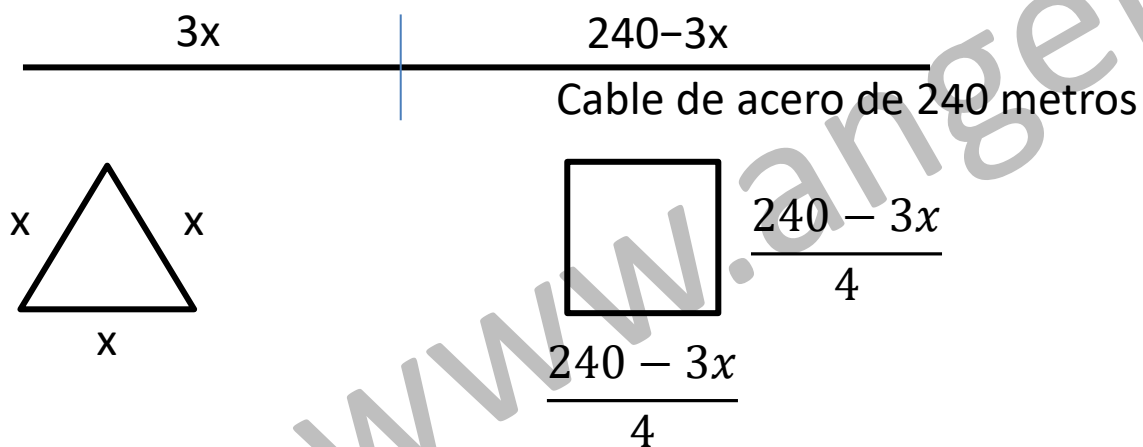
PROBLEMA 6

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 metros de longitud.

- Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo
- Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Solución:

En primer lugar se hace un esquema de la situación.



Los posibles valores de x , se calculan teniendo en cuenta que el lado de los polígonos debe ser positivo.

$$\frac{240-3x}{4} \geq 0 \longrightarrow 240-3x \geq 0 \longrightarrow 240 \geq 3x$$

$$80 \geq x$$

Y puesto que x debe ser un número positivo: $0 \leq x \leq 80$

PROBLEMA 6

A continuación expresaré el área del triángulo y del cuadrado en función de x .

Para ello, debo expresar la altura del triángulo en función de x . Utilizaré la trigonometría, teniendo en cuenta que los ángulos del triángulo equilátero son 60° .

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{h}{x} \longrightarrow h = x \cdot \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$\text{El área del triángulo será: } A_T = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4}$$

$$\text{Por otro lado, el área del cuadrado será: } A_C = \text{lado}^2 = \left(\frac{240 - 3x}{4} \right)^2 = \frac{57600 - 1440x + 9x^2}{16}$$

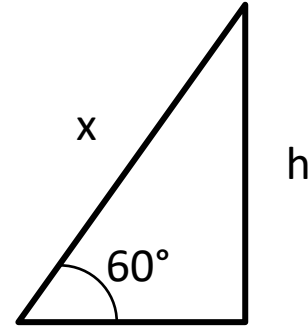
La función pedida, es decir, la suma de las áreas será:

$$A(x) = A_T + A_C = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} + \frac{57600 - 1440x + 9x^2}{16}$$

Siendo el dominio de la función: $0 \leq x \leq 80$



$$\frac{240 - 3x}{4}$$



PROBLEMA 6

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Al operar la expresión obtenida en el apartado a), podemos observar que debemos calcular el mínimo de una función cuadrática. El coeficiente del término cuadrático es positivo, lo cual nos indica que el vértice de la función es el mínimo.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} + \frac{57600 - 1440x + 9x^2}{16} = \frac{4\sqrt{3} \cdot x^2 + 57600 - 1440x + 9x^2}{16} = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{16} \cdot x^2 - 90x + 3600$$

Bastaría con calcular el vértice de la función utilizando la fórmula habitual de 4º de ESO. Pero como este ejercicio está propuesto en las PAU, lo resolveré utilizando derivadas. Por eso, calculo la derivada de la función A(x).

$$A'(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8} \cdot x - 90 \quad \text{Se iguala a cero para obtener el óptimo local.}$$

$$\frac{9 + 4\sqrt{3}}{8} \cdot x - 90 = 0 \longrightarrow \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8} \cdot x = 90 \longrightarrow x = \frac{90}{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{8}} = \frac{720}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 45'2$$

Aunque ya hemos indicado que es un mínimo, vamos a comprobarlo utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

PROBLEMA 6

$$A'(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8} \cdot x - 90$$

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de x obtenido anteriormente. $A''(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8}$

$$A''\left(\frac{720}{9 + 4\sqrt{3}}\right) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva, eso significa que en el valor de x obtenido hay un mínimo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

La longitud de cable empleada es la construcción del triángulo será: $L_T = 3 \cdot x = 3 \cdot \frac{720}{9 + 4\sqrt{3}} = \frac{2160}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 135'6 \text{ m}$

La longitud de cable empleada es la construcción del cuadrado será: $L_C = 240 - L_T = 240 - \frac{2160}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 104'4 \text{ m}$

Se calcula el área mínima sustituyendo el valor de x en la función A(x).

$$A\left(\frac{720}{9 + 4\sqrt{3}}\right) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{720}{9 + 4\sqrt{3}}\right)^2 - 90 \cdot \left(\frac{720}{9 + 4\sqrt{3}}\right) + 3600 \approx 1565'87 \text{ m}^2$$

PROBLEMA 6

Solución: para que la suma de las áreas sea mínima, debe construir un triángulo equilátero de **135'6 metros de perímetro** (lado de 45'2 metros) y un cuadrado de **104'4 metros de perímetro** (lado de 26'1 metros). La suma de las áreas de ambos polígonos, será mínima en las condiciones dadas, y será igual a **1565'87 metros cuadrados**.