Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Junio 2022

Problema 2

Matrices y determinantes

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Rango e inversa de una matriz.
2) Propiedades de los determinantes.

Herramientas utilizadas:

1) Matrices.
2) Determinantes.

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro m.

b) La matriz inversa de A en el caso de m=2.

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz 2A es igual a −8.

Solución: Se utiliza el método de los menores para calcular el rango de A

Se calcula el determinante de A y se iguala a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = -3m^3 + 2m^2 = m^2 \cdot (-3m+2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2/3 \end{cases}$$

Si m$\neq$ 0 y $m \neq 2/3$ entonces $|A| \neq 0$, $\textbf{Ran}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$

Si $m = 0$ o $m = 2/3$ entonces $|A| = 0$, $\textbf{Ran}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3}$

Debo calcular el rango de A sustituyendo los valores de a en las matrices.

Problema 2

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyo por los valores obtenidos anteriormente.

$$\text{Si } m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que si m=0, el rango de A es 1.

$$\text{Si } m = 2/3 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 4/9 & 1 \\ 0 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, es más rápido calcular el valor de un menor y comprobar que es distinto de cero.

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 4/9 & 1 \\ 4/3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \neq 0$$

Se demuestra que si m=2/3, el rango de A es 2.

Solución:

Si m$\neq 0$ y $m \neq 2/3$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$

Si $m = 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1}$

Si $m = 2/3$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$

Problema 2

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz inversa de A en el caso de m=2. Sustituyo por m=2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 16 + 0 - 0 - 0 - 8 = -16 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-16} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$

Problema 2

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz 2A es igual a −8.

Recordamos que ya conocemos el valor del determinante de A en función de m. $|A| = -3m^3 + 2m^2$

Para calcular el determinante de 2A, aplico la propiedad de los determinantes que dice que: $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$

Donde n es el número de filas o columnas del determinante.

$$|2 \cdot A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot |A| = 8 \cdot (-3m^3 + 2m^2) = -8 \longrightarrow -3m^3 + 2m^2 = -1 \longrightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$$

Para poder resolver la ecuación de tercer grado, se debe factorizar el polinomio. Lo haré aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -1 \\ \hline & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \longrightarrow (\mathrm{m}-1)\cdot(-3m^2 - m - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \mathrm{m} - 1 = 0 \\ -3m^2 - m - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{m = 1} \\ \nexists m \in R \end{cases}$$

Os animo a que comprobéis que la ecuación de segundo grado no tiene solución real.

$\boxed{\text{El valor real que cumple lo pedido es } \textbf{m=1}.}$