Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Junio 2022

Problema 3
Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO

Matrices y determinantes
Geometría

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Julio 2021
Problema 2

PAU Julio 2021
Problema 5

PAU Junio 2021
Problema 2

PAU Junio 2021
Problema 5

PAU Septiembre 2020
Problema 2

PAU Septiembre 2020
Problema 5

PAU Julio 2020
Problema 2

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Posición relativa de dos rectas.

Herramientas utilizadas.

1) Matrices.
2) Determinantes

PROBLEMA 3

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s.

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s.

Solución:

Para determinar la posición relativa de las 2 rectas, calculo un punto y un vector director de cada una de ellas.

Lo más cómodo es expresar las ecuaciones de las rectas "r" y "s" en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de forma sencilla.

Dado que la z es la única incógnita que se repite, se asigna un parámetro a dicha incógnita en cada recta.

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \quad ; \lambda \epsilon R \\ z = \lambda \end{cases} \qquad Recta\ r: \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{u} = (1,-3,1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = 4 - 5\mu \\ y = -3 + 4\mu \, ; \mu \epsilon R \\ z = \mu \end{cases} \qquad Recta\ s: \begin{cases} Q = (4,-3,0) \\ \vec{v} = (-5,4,1) \end{cases}$$

PROBLEMA 3

$$Recta\ r: \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{u} = (1,-3,1) \end{cases}$$

$$Recta\ s: \begin{cases} Q = (4,-3,0) \\ \vec{v} = (-5,4,1) \end{cases}$$

Se define una matriz con los vectores directores y se calcula su rango. $V = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Se calcula el rango mediante el método de los menores, orlando la matriz.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot (-5) = -11 \neq 0$ Al ser el menor distinto de cero, Rg(V)=2, y eso significa que los dos vectores no son paralelos, por lo que las rectas **son secantes o se cruzan**.

Se define una matriz con los vectores directores y con el vector que va de un punto P de la recta r a un punto Q de la recta s.

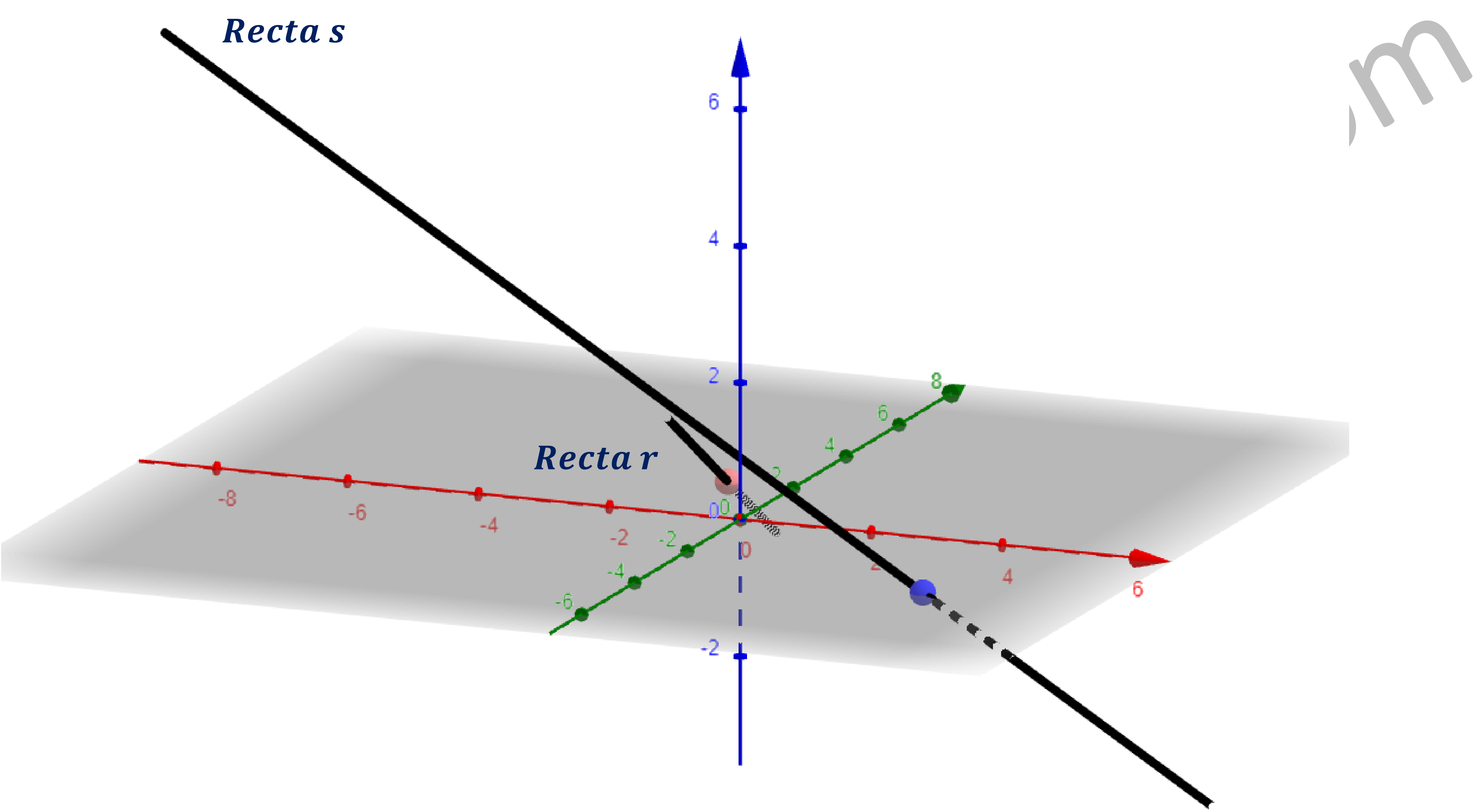
$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,-3,0) - (-1,2,0) = (5,-5,0)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ Se calcula el rango mediante el método de los menores.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, Rg(A)=3, por lo que las rectas **se cruzan**.

PROBLEMA 3



Como puedes comprobar, **se cruzan**.

PROBLEMA 3

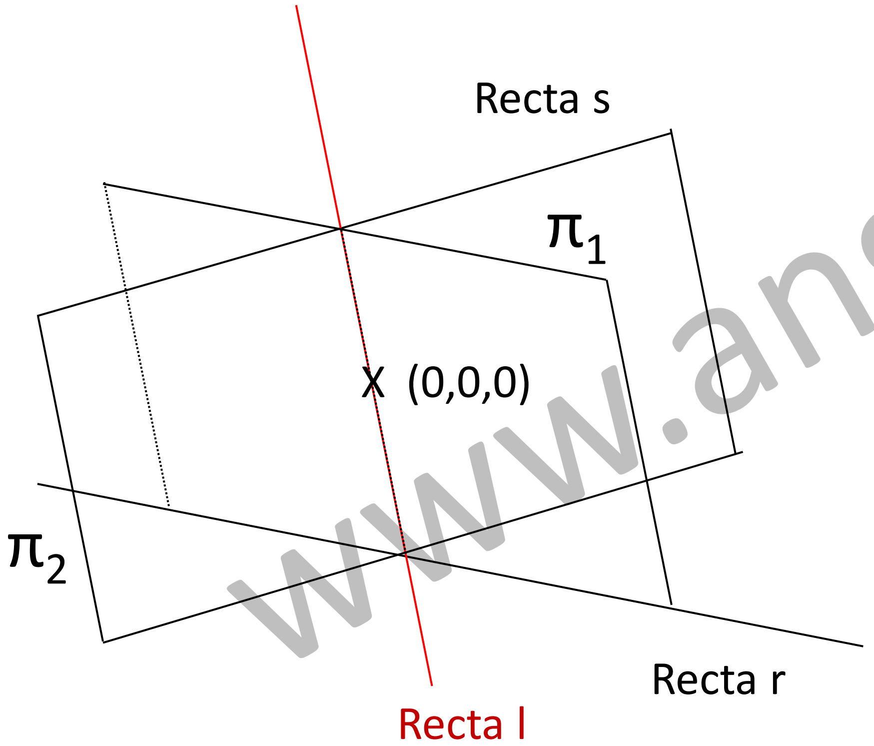
$$Recta\ r: \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{u} = (1,-3,1) \end{cases}$$

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s.

$$Recta\ s: \begin{cases} Q = (4,-3,0) \\ \vec{v} = (-5,4,1) \end{cases}$$

Nos encontramos ante un problema que se suele titular de la siguiente forma: "recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos".

Para entender mejor el ejercicio, es conveniente hacer un esquema.



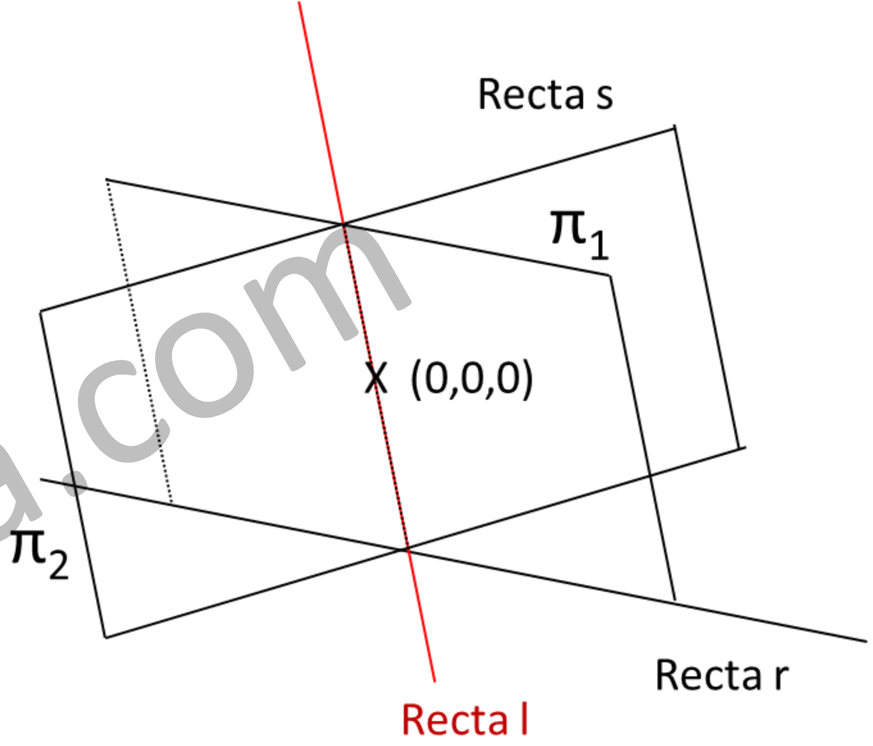
Se define π_1, el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a r.

Se define π_2, el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a s.

La intersección de ambos planos, es la recta pedida.

Una vez entendido el problema, vamos a hacer los cálculos.

PROBLEMA 3



$$Recta\ r: \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{u} = (1,-3,1) \end{cases} \qquad Recta\ s: \begin{cases} Q = (4,-3,0) \\ \vec{v} = (-5,4,1) \end{cases}$$

Calculo π_1, el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a r.

Para ello necesitamos un punto y dos vectores directores.

Disponemos de forma directa de un punto y de un vector director. Debemos hallar el otro vector director del plano. Dicho vector será el que una un punto cualquiera de la recta r con el punto O.

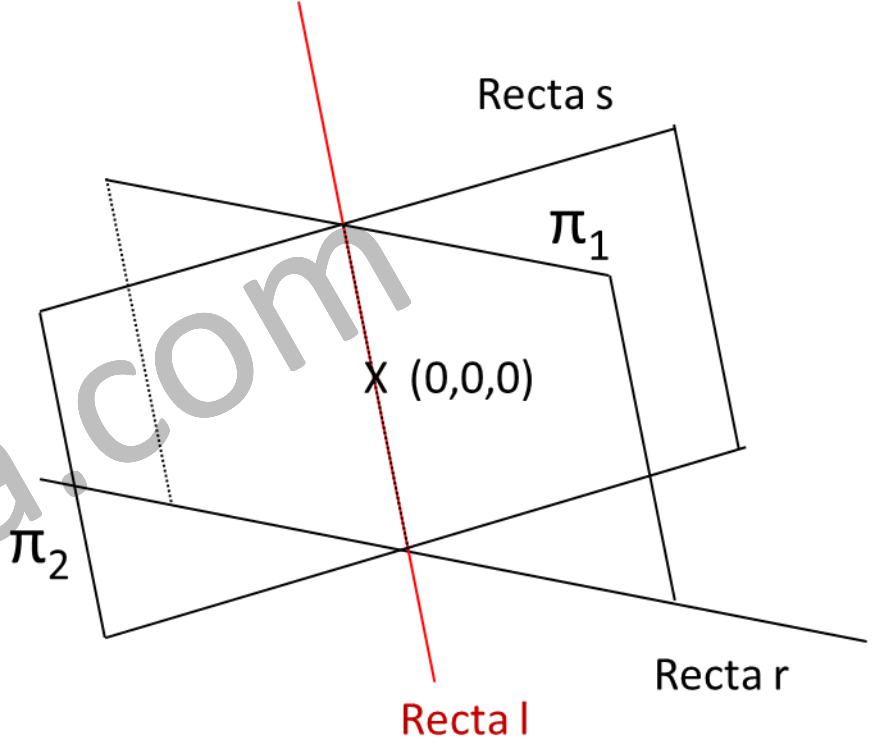
$$\overrightarrow{OP} = P - O = (-1,2,0) - (0,0,0) = (-1,2,0)$$

Se calcula la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2z - y - (3z + 2x) = 0 \longrightarrow -2x - y - z = 0$$

Siendo π_1 $\quad \pi_1 = 2x + y + z = 0$

PROBLEMA 3



$Recta\ r: \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{u} = (1,-3,1) \end{cases}$ $\quad Recta\ s: \begin{cases} Q = (4,-3,0) \\ \vec{v} = (-5,4,1) \end{cases}$

Calculo π_2, el plano auxiliar que pasa por el origen y contiene a s.

Para ello necesitamos un punto y dos vectores directores.

Disponemos de forma directa de un punto y de un vector director. Debemos hallar el otro vector director del plano. Dicho vector será el que una un punto cualquiera de la recta r con el punto O.

$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = (4,-3,0) - (0,0,0) = (4,-3,0)$$

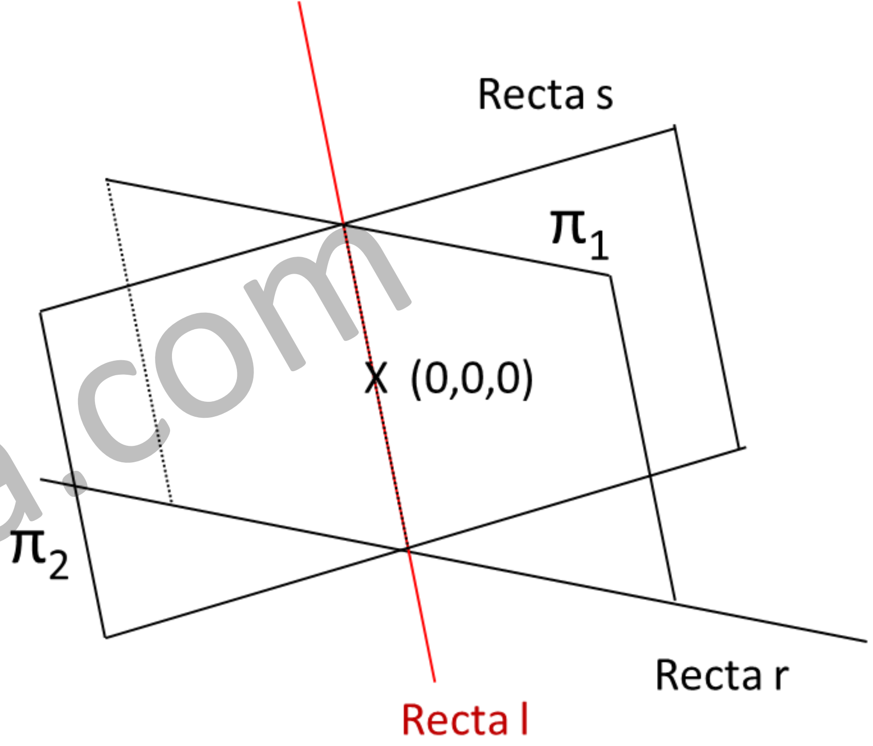
Se calcula la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 15z + 4y - (16z - 3x) = 0 \longrightarrow 3x + 4y - z = 0$$

Siendo π_2 $\quad \pi_2 = 3x + 4y - z = 0$

PROBLEMA 3

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{u} = (1,-3,1) \end{cases} \qquad \text{Recta } s: \begin{cases} Q = (4,-3,0) \\ \vec{v} = (-5,4,1) \end{cases}$$



$$\pi_1 = 2x + y + z = 0 \qquad \pi_2 = 3x + 4y - z = 0$$

La intersección de ambos planos, es la recta pedida. Se expresa la ecuación de dicha recta en su forma general.

$$\boxed{l: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}}$$

RETO: ¿Cuáles serían las ecuaciones paramétricas de dicha recta?

$$\boxed{l: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}}$$

PROBLEMA 3