Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Junio 2022

Problema 4
Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO

Matrices y determinantes
Geometría

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Julio 2021
Problema 2

PAU Julio 2021
Problema 5

PAU Junio 2021
Problema 2

PAU Junio 2021
Problema 5

PAU Septiembre 2020
Problema 2

PAU Septiembre 2020
Problema 5

PAU Julio 2020
Problema 2

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Posición relativa de dos planos.

Herramientas utilizadas.

1) Determinantes

PROBLEMA 4

Dadas los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto P=(1,0,0) respecto del plano π_1.

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r.

Solución:

Para determinar la posición relativa de las 2 planos, debo expresar ambos en forma general.

De las ecuaciones paramétricas de π_2 se deducen un punto y dos vectores directores. $Q = (-1,1,0); \vec{u} = (1,1,1); \vec{v} = (0,1,-1)$

Se calcula la ecuación general de π_2 con ayuda de un determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow -2x + y + z - 3 = 0$$

Siendo π_2 $\pi_2: -2x + y + z - 3 = 0$

PROBLEMA 4

A partir de las ecuaciones generales de ambos planos deducimos su posición relativa:

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2: -2x + y + z - 3 = 0$$

Estudio la proporcionalidad de los coeficientes de las ecuaciones de los planos.

$$\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{4}{-3}$$

Pudiendo concluir que los planos π_1 y π_2 son **paralelos.**

PROBLEMA 4

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto P=(1,0,0) respecto del plano π_1. $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$

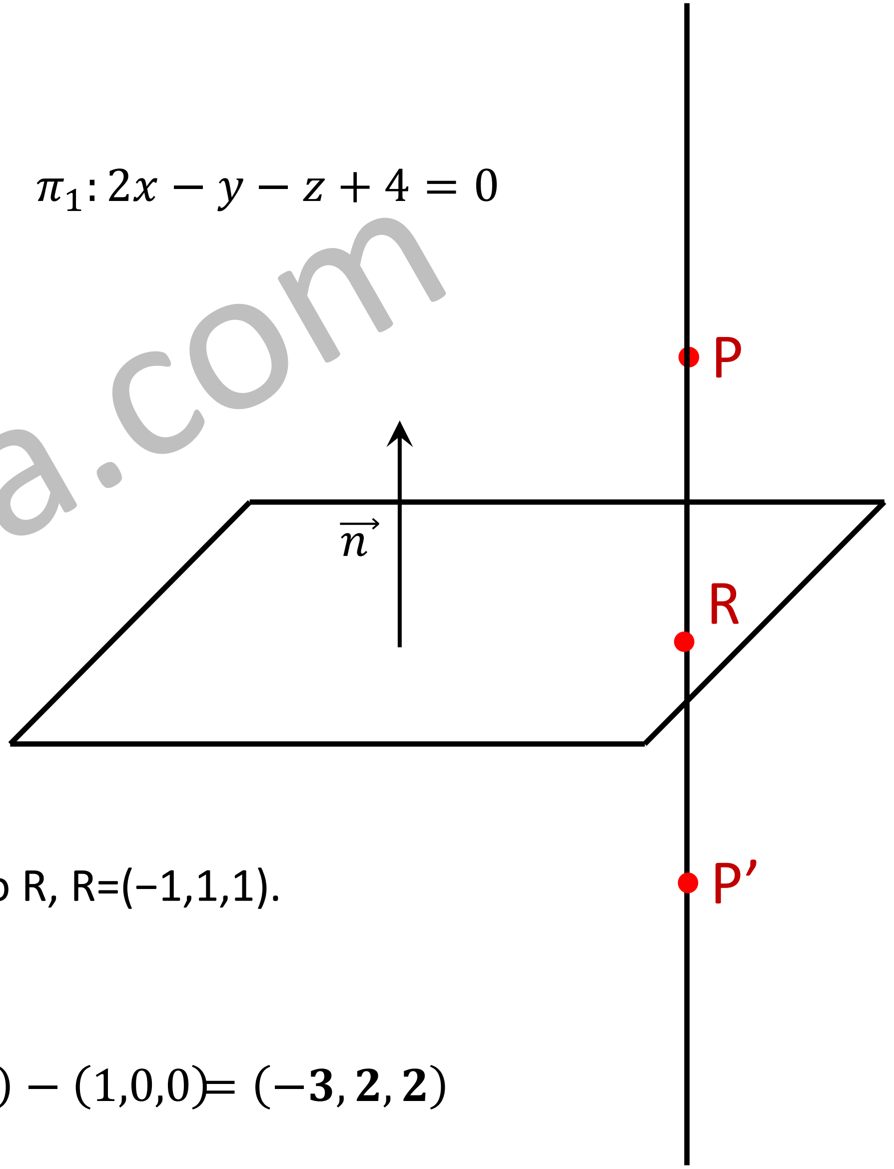
Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) Anotamos el vector normal del plano. $\vec{n} = (2, -1, -1)$

2) Definimos una recta que pasa por P y tiene por vector director al normal del plano.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. R.



Se sustituye r en π_1:

$$2x - y - z + 4 = 0 \longrightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0$$

$$2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0 \longrightarrow 6\lambda + 6 = 0 \longrightarrow \lambda = -1$$ Siendo el punto R, R=(−1,1,1).

4) Se calcula el punto simétrico de P respecto de Q.

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RP'} \longrightarrow R - P = P' - R \longrightarrow P' = 2R - P \longrightarrow P' = 2 \cdot (-1,1,1) - (1,0,0) = (\mathbf{-3, 2, 2})$$

$$\boxed{El\ punto\ simétrico, \boldsymbol{es\ P'} = (\mathbf{-3, 2, 2})}$$

PROBLEMA 4

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ $\quad r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

Se expresa la recta r en forma paramétrica. $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

Se sustituyen los valores de (x,y,z) de la recta en la ecuación del plano.

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0 \longrightarrow 2 \cdot (1 + \lambda) - 2\lambda - (2 - \lambda) + 4 = 0 \longrightarrow 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0$$

$$2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda = -4$$

Se sustituye en las ecuaciones paramétricas para obtener el punto de intersección.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 - 4 = \mathbf{-3} \\ y = 2\lambda = 2 \cdot (-4) = \mathbf{-8} \\ z = 2 - \lambda = 2 - (-4) = \mathbf{6} \end{cases}$$

$$\boxed{El\ punto\ de\ intersección\ \boldsymbol{es\ T} = (\mathbf{-3}, \mathbf{-8}, \mathbf{6})}$$