Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Junio 2022

Problema 5
Análisis de funciones e integrales

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Cálculo del dominio de una función.
2) Cálculo de las asíntotas de una función.
3) Cálculo de la primitiva de una función.

Herramientas:

1) Límites.
2) Derivadas
3) Primitivas.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021
Problema 3

Problema 5

Considerad la función $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

b) Las asíntotas de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos

d) La primitiva de la función $f(x)$.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-2, 2\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2+3}{0^2-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left(0, -\frac{3}{4}\right)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2+3}{x^2-4} = 0 \rightarrow x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} = \nexists$$

$\boxed{\text{La función no tiene puntos de corte con el Eje X.}}$

Problema 5

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=2; $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7}{0^+}=+\infty \end{cases}, luego\ \boxed{\boldsymbol{x=2\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

En x= −2; $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7}{0^+}=+\infty \\ \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7}{0^-}=-\infty \end{cases}, luego\ \boxed{\boldsymbol{x=-2\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$por\ lo\ tanto\ \boxed{\boldsymbol{y=1\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Problema 5

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se calcula la derivada para estudiar la monotonía de la función y sus puntos singulares.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0 \longrightarrow -14x = 0 \longrightarrow x = 0$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
f'(x)	+	+	−	−
f(x)	↗	↗	↘	↘

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(0,2\,)\cup(2\,,+\infty\,)$ y **creciente** en $x\epsilon(-\infty,-2)\;\cup\;(-2,0\,)$.

Se observa que el **máximo relativo** se encuentra en x=0, es decir, el punto de corte con el eje Y.

$$\boxed{\boldsymbol{A = \left(0,-\frac{3}{4}\right)}}$$

Problema 5

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se calcula la primitiva de la función racional dada.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2 - 4 + 4 + 3}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4}{x^2-4}dx + \int \frac{7}{x^2-4}dx = \int 1\,dx + \int \frac{7}{x^2-4}dx$$

La segunda integral, es una integral racional en la cual el denominador tiene raíces reales simples. Aplicaré el método de factorización lineal para transformar esta integral en otras dos que si pueda integrar de forma inmediata.

$$\int \frac{7}{x^2-4}dx = \int \frac{7}{(x-2)\cdot(x+2)}dx = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\ dx = \int \frac{A}{x-2}\ dx + \int \frac{B}{x+2}\ dx = A\int \frac{1}{x-2}\ dx + B\int \frac{1}{x+2}\ dx$$

Calculo los valores de A y B.

$$\frac{7}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)} + \frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)} \longrightarrow 7 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-2)$$

Se dan los valores de las raíces.

Si x=2 $\longrightarrow 7 = 4A \longrightarrow A = \frac{7}{4}$

Si x=−2 $\longrightarrow 7 = -4B \longrightarrow B = \frac{-7}{4}$

Problema 5

Se resuelve la integral y es expresa la solución de distintas formas.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = \int 1\,dx + \int \frac{7}{x^2-4}dx = \int 1\,dx + A\int \frac{1}{x-2}\,dx + B\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int 1\,dx + \frac{7}{4}\cdot\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{7}{4}\cdot\int \frac{1}{x+2}\,dx = x + \frac{7}{4}\cdot Ln|x-2| - \frac{7}{4}\cdot Ln|x+2| + C$$

$$\int f(x)dx = x + \frac{7}{4}\cdot Ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$$\int f(x)dx = x + Ln\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)^{\frac{7}{4}} + C$$

$$\int f(x)dx = x + Ln\left(\sqrt[4]{\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)^{7}}\right) + C$$