

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 1

Álgebra matricial/Sistemas de ecuaciones

# Problema 1

Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

- a) Estudiar cuándo la ecuación matricial  $A^2 \cdot X = B$  tiene solución en función del parámetro real  $m$ .
- b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.

**Solución:**

Se calcula en primer lugar la matriz  $A^2$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot m + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + m \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + m \cdot m + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + m \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot m + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

Se operan  $A^2$  y  $X$ .

$$A^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + (2 + 2m) \cdot y + 2 \cdot z \\ 0 \cdot x + (m^2 + 3) \cdot y + m \cdot z \\ 0 \cdot x + (3m) \cdot y + 3 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (2 + 2m)y + 2z \\ (m^2 + 3)y + mz \\ (3m)y + 3z \end{pmatrix}$$

# Problema 1

Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial  $A^2 \cdot X = B$  tiene solución en función del parámetro real  $m$ .

Se igualan las matrices de la ecuación.

$$\begin{pmatrix} x + (2 + 2m)y + 2z \\ (m^2 + 3)y + mz \\ (3m)y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices sean iguales, deben serlo todos sus términos  $a_{ij}$ .

$$\begin{cases} x + (2 + 2m)y + 2z = m \\ (m^2 + 3)y + mz = 0 \\ (3m)y + 3z = 9 \end{cases}$$

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 & m \\ 0 & m^2 + 3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

# Problema 1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de C en función de ***m*** utilizando su determinante.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 & m \\ 0 & m^2 + 3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de C es distinto de cero para todo valor de m, podemos afirmar que:

$$\boxed{Rg(C) = Rg(C^*) = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3 \rightarrow \text{el sistema es compatible determinado } \forall m \in R}$$

# Problema 1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.

Se podría despejar X utilizando las propiedades de la matriz inversa, pero calcular la inversa de  $A^2$  en función de m es muy tedioso, por eso prefiero resolver el sistema por la denostada (por algunos) regla de Cramer.

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 & m \\ 0 & m^2 + 3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Recordamos que:  $|C| = 9$

$$x = \frac{|C_x|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 9 & 3m & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{27m - 54}{9} = \frac{9 \cdot (3m - 6)}{9} = \boxed{3m - 6}$$

$$y = \frac{|C_y|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-9m}{9} = \boxed{-m}$$

$$z = \frac{|C_z|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 + 2m & m \\ 0 & m^2 + 3 & 0 \\ 0 & 3m & 9 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9m^2 + 27}{9} = \frac{9 \cdot (m^2 + 3)}{9} = \boxed{m^2 + 3}$$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 2

Álgebra matricial

# Problema 2

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,

a) Obtener la matriz  $(AB^T + I)^{-1}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.

b) Comprobar que  $C^2 = -\alpha^3 \cdot I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, y calcular  $C^{13}$ .

**Solución:**

Se calcula en primer lugar la matriz  $B^T$ .  $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se calcula el producto  $A \cdot B^T$ .

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se calcula  $AB^T + I$ . La matriz identidad debe ser de orden 2.

$$A \cdot B^T + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

# Problema 2

a) Obtener la matriz  $(AB^T + I)^{-1}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.

$$E = A \cdot B^T + I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Simplifico la nomenclatura de la matriz pedida.}$$

Calcularé la matriz inversa de E, mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo  $|E|$ ;  $|E| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$  Al ser el determinante distinto de cero, la matriz E **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos:  $Adj(E) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos:  $(Adj(E))^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula:  $E^{-1} = \frac{1}{|E|} \cdot (Adj(E))^t \longrightarrow E^{-1} = (AB^T + I)^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(AB^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



# Problema 2

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,

b) Comprobar que  $C^2 = -\alpha^3 \cdot I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, y calcular  $C^{13}$ .

Se calcula el producto  $C^2$ .

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \alpha \cdot (-\alpha^2) & 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot 0 \\ (-\alpha^2) \cdot 0 + 0 \cdot (-\alpha^2) & (-\alpha^2) \cdot \alpha + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quedando demostrado que:  $C^2 = -\alpha^3 \cdot I$

Se calcula  $C^{13}$  en función de  $C^2$ .

$$C^{13} = C^{2 \cdot 6 + 1} = (C^2)^6 \cdot C = (-\alpha^3 \cdot I)^6 \cdot C = \alpha^{18} \cdot C = \alpha^{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 3

Geometría

©Angel Cuesta Arza

# PROBLEMA 3

Dada la recta  $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$  y los puntos  $P = (0,0,3)$  y  $Q = (2,2,a)$ , obtener:

- a) Los valores del parámetro real  $a$ , si existen, para los que son paralelas la recta  $r$  y la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .
- b) La ecuación del plano perpendicular a  $r$  y que pasa por  $P$ .

**Solución:**

Se calcula el vector director de la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,2,a) - (0,0,3) = (2,2,a-3)$

Para que dos rectas sean paralelas, sus vectores directores deben ser iguales o proporcionales. Además, no deben tener ningún punto en común (si lo tienen, serían rectas coincidentes).

Calculo el vector director de la recta  $r$ , se asigna el parámetro a  $y$ , y se resuelve.

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Recta } r: \begin{cases} R = (1,0,-1) \\ \vec{u} = (1,1,-3) \end{cases}$$

Se calcula el valor de  $a$  para que los vectores directores sean paralelos.  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{a-3}$

$$\frac{1}{2} = \frac{-3}{a-3} \longrightarrow a-3 = -6 \longrightarrow a = -3$$

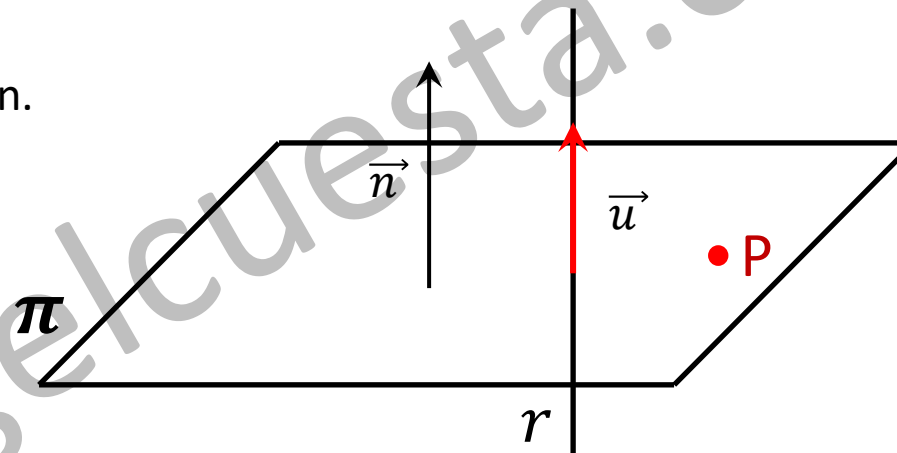
Se puede comprobar fácilmente que  $P \notin r$ , por lo que las rectas son paralelas para  $a = -3$ .

# PROBLEMA 3

Dada la recta  $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$  y los puntos  $P = (0,0,3)$  y  $Q = (2,2,a)$ , obtener:

b) La ecuación del plano perpendicular a  $r$  y que pasa por  $P$ . Anteriormente hemos calculado que:  $r: \begin{cases} R = (1,0,-1) \\ \vec{u} = (1,1,-3) \end{cases}$

Se hace un pequeño esquema para ilustrar la situación.



El vector normal del plano será igual al vector director de la recta. Se calcula la ecuación del plano a partir de dicho vector normal y del punto  $P$  mediante la ecuación correspondiente.

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0 \longrightarrow 1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 3 \cdot (z - 3) = 0$$

**Solución:** El plano pedido es:  $\pi: x + y - 3z + 9 = 0$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 4

Geometría

# PROBLEMA 4

Dada la recta  $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$  y el punto  $P = (0,5,2)$  se pide:

- a) Comprobar que el punto  $Q = (2,6,0)$  pertenece a la recta  $r$  y encontrar la recta  $s$  que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .
- b) Obtener el ángulo que forman la recta  $r$  y la recta  $s$ .
- c) Obtener la proyección ortogonal del punto  $P$  y la recta  $r$ .

## Solución:

Se sustituye el punto  $Q$  en la recta  $r$  para comprobar si verifica sus ecuaciones.

$$\begin{cases} 5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 0 = 16 \\ 9 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot 0 = 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 16 = 16 \\ 12 = 12 \end{cases} \quad \text{Por lo que podemos afirmar que } Q \in r$$

Se calcula el vector director de la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,6,0) - (0,5,2) = (2,1,-2)$

Se escriben las ecuaciones paramétricas de  $s$ :

$$s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

# PROBLEMA 4

Dada la recta  $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$  y el punto  $P = (0,5,2)$  se pide:

b) Obtener el ángulo que forman la recta  $r$  y la recta  $s$ .

Las ecuaciones paramétricas de  $s$  son:  $s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$  y su vector director es:  $\vec{v}_s = (2, 1, -2)$

El vector director de  $r$  se calcula con el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen la recta  $r$

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 28\vec{j} - 14\vec{k} \equiv \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (1, 2, -1)$$

Los vectores se pueden simplificar.

El ángulo entre las rectas es el que forman los vectores directores.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 35,26^\circ$$

El ángulo que forman las rectas es **35,26°**

# PROBLEMA 4

c) Obtener la proyección ortogonal del punto  $P$  y la recta  $r$ .

Como ya disponemos del vector director de  $r$ ;  $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$ ; y sabemos que el punto  $Q = (2, 6, 0)$  pertenece a  $r$ . Se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$ .

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto  $P$ .  $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$   $P = (0, 5, 2)$

2) Definimos un plano que pasa por  $P$  y tiene por vector normal,  $\vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, -1)$ .

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

$$1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 5) - 1 \cdot (z - 2) = 0 \rightarrow \text{El plano auxiliar es: } \pi: x + 2y - z - 8 = 0$$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano.  $R$  (que es la proyección ortogonal pedida).

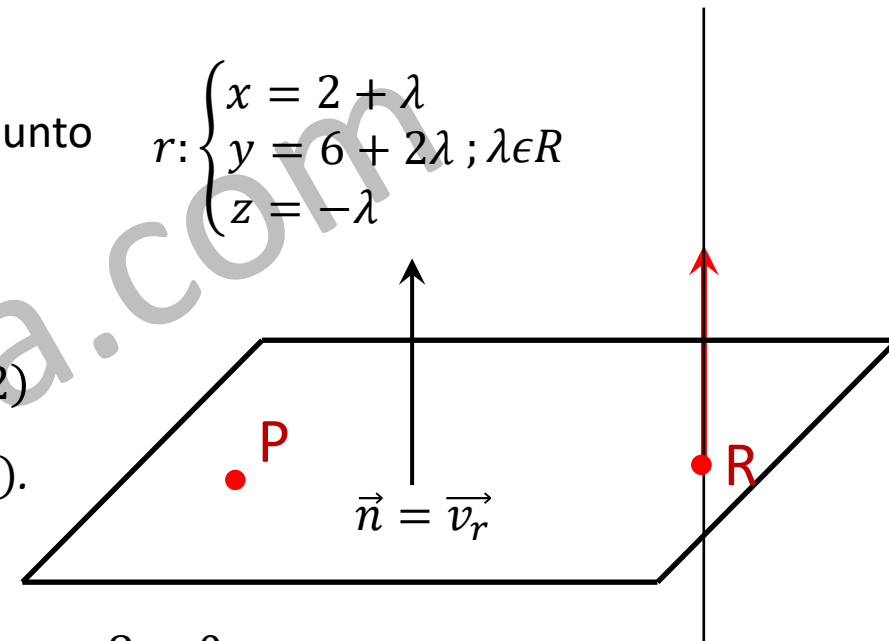
Se sustituye  $r$  en  $\pi$ :

$$x + 2y - z - 8 = 0 \rightarrow 2 + \lambda + 2 \cdot (6 + 2\lambda) - (-\lambda) - 8 = 0 \rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Se obtiene el punto  $Q$ , sustituyendo  $\lambda = -1$  en  $r$ .

$$R: \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \\ z = -\lambda = -(-1) = 1 \end{cases}$$

La proyección ortogonal es  $R = (1, 4, 1)$





# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 5

Análisis de funciones e integrales

# Problema 5

Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$  Obtener:

- a) El dominio y las asíntotas de  $f(x)$ .
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ , y sus máximos y mínimos.
- c) El área comprendida entre la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ .

**Solución:** Para calcular el dominio se calcula el dominio de cada sumando.

$$\frac{1}{x} \rightarrow \text{Dom} \left( \frac{1}{x} \right) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\ln(x + 1) \rightarrow \text{Dom} (\ln(x + 1)) = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 > 0\} \longrightarrow \text{Dom} (\ln(x + 1)) = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$$

El dominio de  $f(x)$  es la intersección de los dominios de ambos sumandos.



$$\text{Dom} \left( f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1) \right) = \{x \in \mathbb{R} / x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)\}$$

# Problema 5

Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$  Obtener: a) El dominio y **las asíntotas** de  $f(x)$ .

Para estudiar las **asíntotas verticales**, estudiaremos el límite en los puntos conflictivos. En este caso  $x = -1$  y  $x = 0$ .

Calculo los límites de la función en esos puntos.

$$\text{En } x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln(0) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln(0^-) = \nexists \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln(0^+) = -\infty \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x = -1$  es asíntota vertical de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $-1$  por la derecha.

$$\text{En } x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0} + \ln(1) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0^-} + \ln(1^-) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0^+} + \ln(1^+) = +\infty \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x = 0$  es asíntota vertical de  $f(x)$

# Problema 5

Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$  Obtener: a) El dominio y **las asíntotas** de  $f(x)$ .

La **asíntota horizontal** se calcula haciendo el límite cuando  $x$  tiende a más infinito. No es necesario hacer el límite cuando  $x$  tiende a menos infinito porque la función no está definida para números menores que  $-1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \ln(x + 1) = \frac{1}{+\infty} + \ln(+\infty + 1) = +\infty \quad \text{por lo tanto } f(x) \text{ no tiene asíntota horizontal.}$$

Al no tener la función asíntota horizontal, debemos comprobar si tiene asíntota oblicua.  $y = m \cdot x + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{x} + \ln(x + 1)}{x} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1}}{1} = \frac{\frac{-1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty + 1}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

por lo tanto  $f(x)$  no tiene asíntota oblicua.

# Problema 5

Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$  Obtener:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ , y sus máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+x^2}{x^2 \cdot (x+1)} = \frac{x^2-x-1}{x^2 \cdot (x+1)}$$

Igualemos la derivada a cero la derivada y resolvemos la ecuación.

$$\frac{x^2-x-1}{x^2 \cdot (x+1)} = 0 \longrightarrow x^2-x-1=0 \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

|         | -1 | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$                                                              | 0                                                                                    | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$                                                                | $+\infty$                                                                             |
|---------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ |    | +                                                                                   | -                                                                                    | -                                                                                     | +                                                                                     |
| $f(x)$  |    |  |  |  |  |

# Problema 5

Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$  Obtener:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ , y sus máximos y mínimos.

|         |                                                                                   |                          |                                                                                    |                          |                                                                                     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|         | -1                                                                                | $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ | 0                                                                                  | $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ | $+\infty$                                                                           |
| $f'(x)$ | +                                                                                 |                          | -                                                                                  |                          | +                                                                                   |
| $f(x)$  |  |                          |  |                          |  |

$f(x)$  es creciente si  $x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

$f(x)$  es decreciente si  $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Máximo relativo en  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$   $f\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \approx -2,58 \longrightarrow$  Máximo;  $M = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -2,58\right)$

Mínimo relativo en  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$   $f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 1,58 \longrightarrow$  Mínimo;  $m = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1,58\right)$

# Problema 5

Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$  Obtener:

c) El área comprendida entre la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $y = 0, x = 1$  y  $x = 2$ .

Puesto que la función es positiva entre  $x=1$  y  $x=2$ , el valor del área será igual al de la integral definida de  $f(x)$  entre  $x=1$  y  $x=2$ .

Se calcula la función primitiva en primer lugar.

$$\int \left( \frac{1}{x} + \ln(x + 1) \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \ln(x + 1) dx = \ln|x| + \int \ln(x + 1) dx$$

La integral del logaritmo neperiano se debe resolver mediante la técnica de integración por partes.

$$\int \ln(x + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x + 1) \rightarrow du = \frac{1}{x + 1} dx \\ dv = 1 dx \rightarrow v = \int 1 dx = x \end{array} \right\} = x \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x}{x + 1} dx$$

Para resolver la integral del cociente, sumo y resto 1 al numerador.

$$\int \ln(x + 1) dx = x \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x + 1 - 1}{x + 1} dx = x \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x + 1}{x + 1} - \frac{1}{x + 1} dx$$

# Problema 5

$$\int \ln(x+1)dx = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - \int 1dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int \ln(x+1)dx = x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

$$F(x) = \int \left( \frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \ln|x| + x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

Una vez calculada la función primitiva, ya podemos aplicar la regla de Barrow.

$$\text{Área} = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = F(2) - F(1)$$

$$F(2) = \ln|2| + 2 \cdot \ln(2+1) - 2 + \ln|2+1| = \ln(2) + 2 \cdot \ln(3) - 2 + \ln(3) = 3 \cdot \ln(3) + \ln(2) - 2$$

$$F(1) = \ln|1| + 1 \cdot \ln(1+1) - 1 + \ln|1+1| = 0 + \ln(2) - 1 + \ln(2) = 2 \cdot \ln(2) - 1$$

$$\text{Área} = (3 \cdot \ln(3) + \ln(2) - 2) - (2 \cdot \ln(2) - 1) = 3 \cdot \ln(3) - \ln(2) - 1 \approx 1,603 \text{ u}^2$$

El área encerrada es **1,603 unidades de área**, aproximadamente.

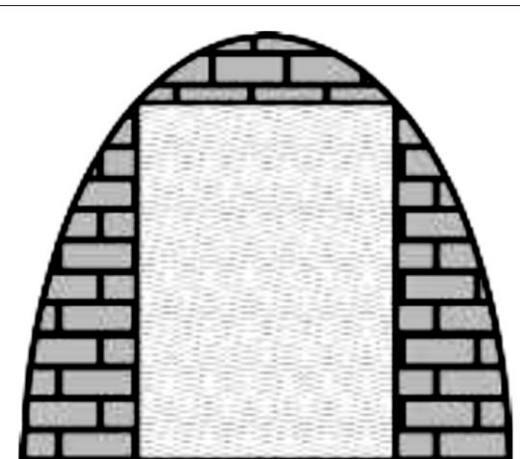


# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 6

Problema de optimización

# PROBLEMA 6

El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación  $y = -x^2 + 12$ , donde  $x$  e  $y$  se miden en metros e  $y = 0$  representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

- Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.
- Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

## Solución:

En primer lugar, se definen en función de  $x$  los vértices del rectángulo. Para ver los límites en los que se mueve  $x$ , calculo los puntos de corte con los ejes de la función.

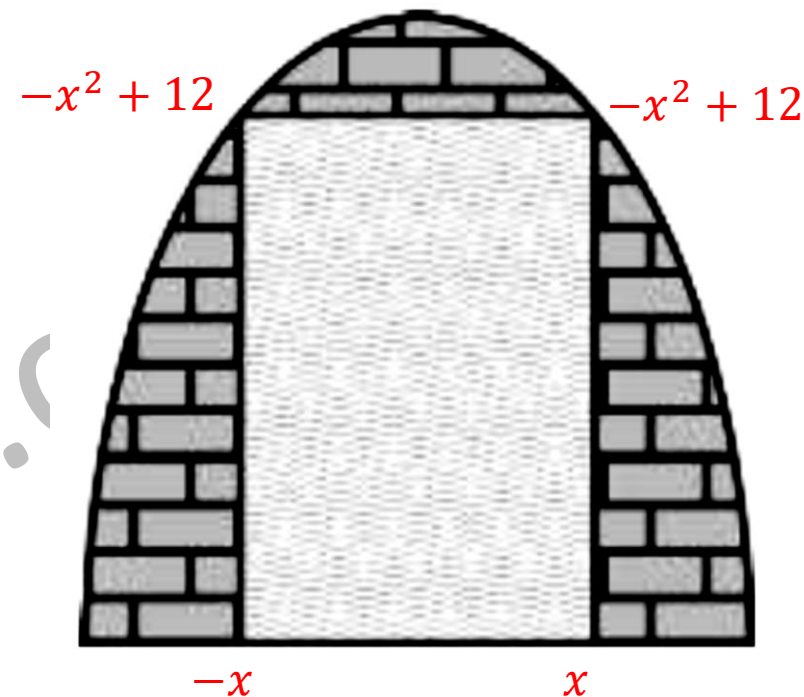
$$-x^2 + 12 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

A continuación, se define la función que nos proporciona la superficie de la puerta.

$$f(x) = 2x \cdot (-x^2 + 12); \quad 0 < x < \sqrt{12}$$

Opero la función para derivarla más fácilmente. Para calcular el máximo de la función, se deriva e iguala a cero.

$$f(x) = -2x^3 + 24x \longrightarrow f'(x) = -6x^2 + 24 \xrightarrow{0 < x < \sqrt{12}} -6x^2 + 24 = 0 \longrightarrow x = \pm 2 \longrightarrow x = 2$$



# PROBLEMA 6

a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

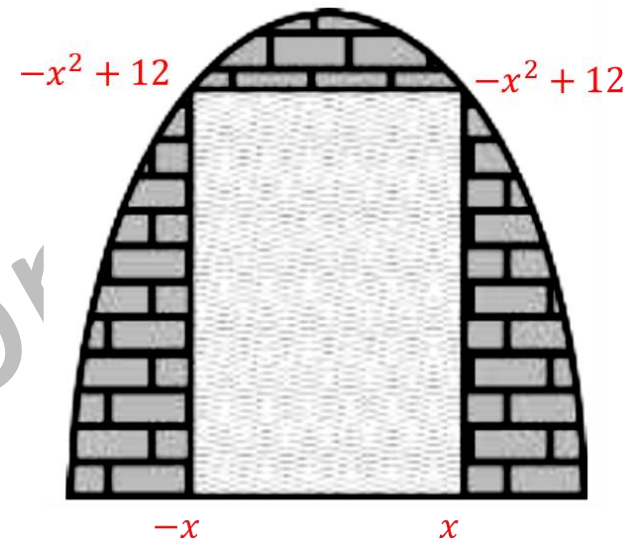
Para determinar si  $x=2$  nos proporciona la superficie máxima o mínima, utilizaré el criterio de la segunda derivada. Utilizo este método, ya que en este caso es fácil obtener la función segunda derivada.

$$f'(x) = -6x^2 + 24 \longrightarrow f''(x) = -12x \longrightarrow f''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0$$

Por ser el valor de la segunda derivada en el valor crítico negativo, podemos afirmar que  **$x=2$  maximiza la función.**

Se calcula el valor de la altura de la puerta.  $y(2) = -2^2 + 12 = 8$

La puerta de máxima superficie tendrá una **base de 4 metros**, una **altura de 8 metros**.



# PROBLEMA 6

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

Se calcula la superficie de la puerta utilizando la función utilizada antes.  $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = 32$

La superficie máxima que puede tener la puerta es **32 m<sup>2</sup>**.

Se calcula el área total bajo la curva en  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$  utilizando la integral y la regla de Barrow.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} (-x^2 + 12) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + 12x \right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} = \left[ -\frac{(\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (\sqrt{12}) \right] - \left[ -\frac{(-\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (-\sqrt{12}) \right] \\ A &= -\frac{(\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (\sqrt{12}) + \frac{(-\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (\sqrt{12}) = -\frac{2 \cdot (\sqrt{12})^3}{3} + 24 \cdot (\sqrt{12}) = -\frac{24 \cdot (\sqrt{12})}{3} + 24 \cdot (\sqrt{12}) \\ A &= \frac{-24 \cdot (\sqrt{12}) + 72 \cdot (\sqrt{12})}{3} = \frac{48 \cdot (\sqrt{12})}{3} = 16 \cdot (\sqrt{12}) = 32 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ya disponemos del área total, en la siguiente diapositiva termino el ejercicio.

# PROBLEMA 6

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

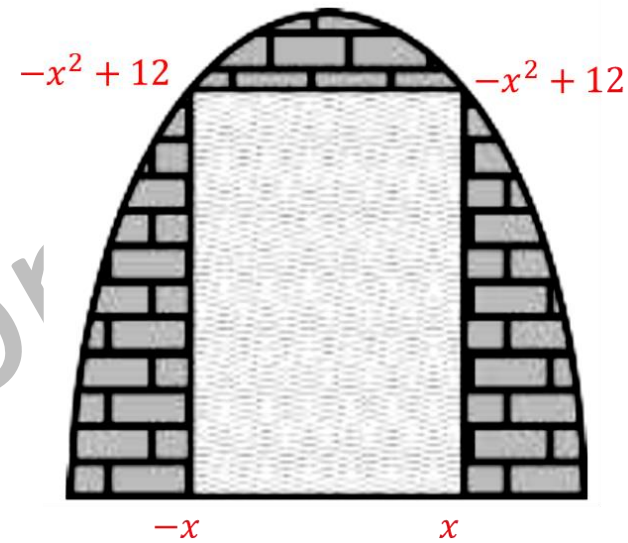
El área bajo la curva (pared y puerta) es  $32 \cdot \sqrt{3}$  unidades de área.

La superficie de la puerta es 32 unidades de área.

La superficie de la pared es la diferencia entre el área total y el área de la puerta.

$$A = 32 \cdot \sqrt{3} - 32 = 32 \cdot (\sqrt{3} - 1) \text{ unidades de área}$$

La superficie recubierta de pared es  $32 \cdot (\sqrt{3} - 1) \text{ m}^2$ .



# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 7  
Probabilidad

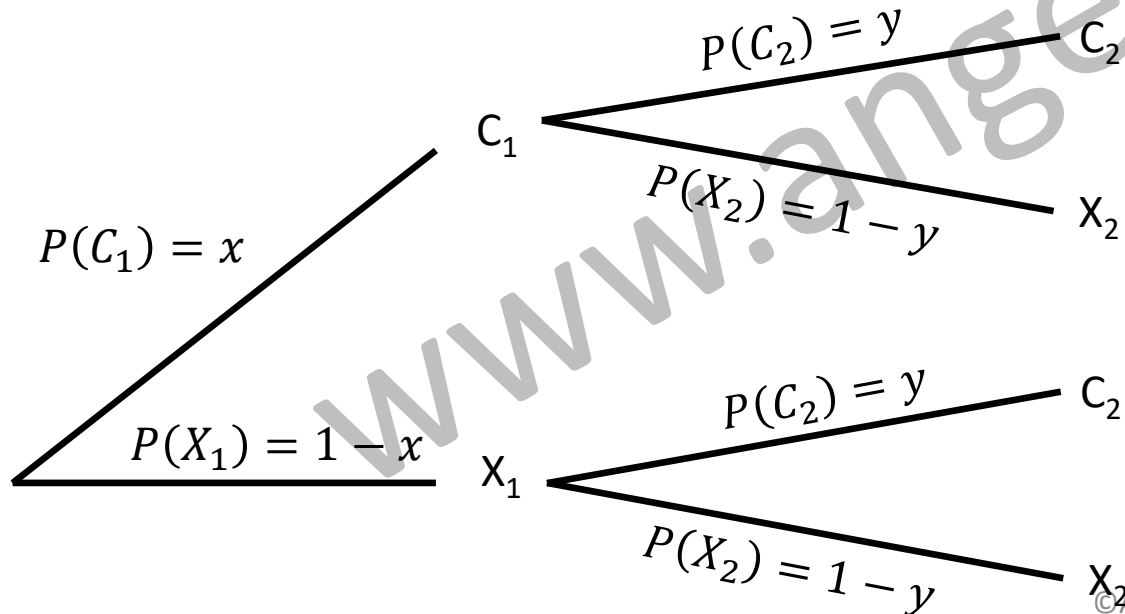
# PROBLEMA 7

Tenemos dos monedas distintas  $M_1$  y  $M_2$ . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda  $M_1$  es  $x$  y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda  $M_2$  es  $y$ .

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.

**Solución:** Se construye el diagrama de árbol. Las probabilidades se expresan en función de  $x$  e  $y$ .



Se definen los sucesos:

$C_1$ =La primera moneda sale cara

$X_1$ =La primera moneda sale cruz

$C_2$ =La segunda moneda sale cara

$X_2$ =La segunda moneda sale cruz

Los sucesos son independientes por eso no se ponen probabilidades condicionadas.

# PROBLEMA 7

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.

Obtener ninguna cara equivale a obtener dos cruces

$$P(X_1 \cap X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) = (1 - x) \cdot (1 - y) = 1 - x - y + xy$$

La probabilidad de no obtener ninguna cara es:  $1 - x - y + xy$

Como hay dos formas de obtener una cara, las tenemos en cuenta.

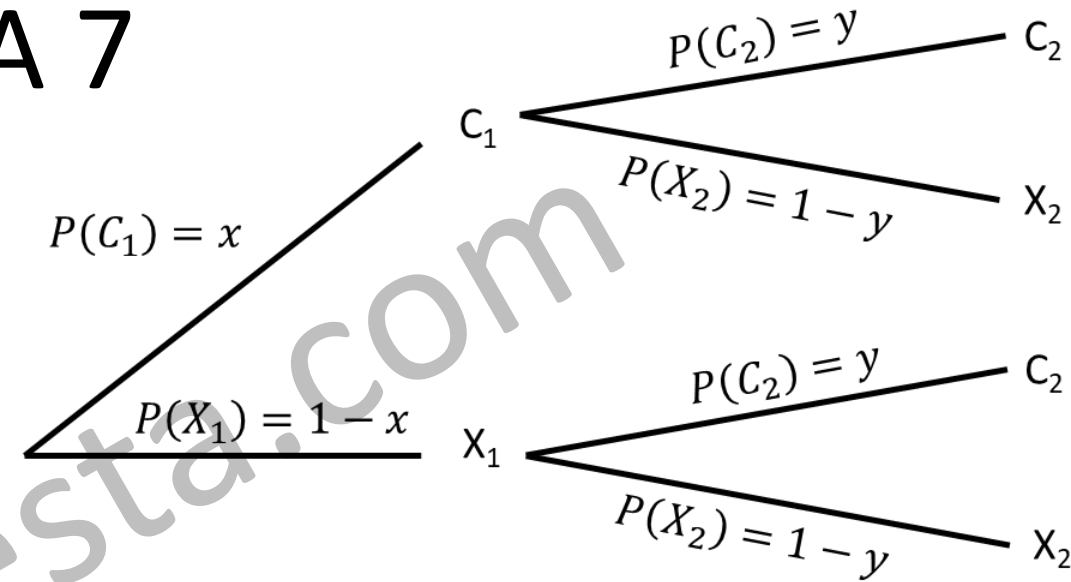
$$P(C_1 \cap X_2) + P(X_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(X_2) + P(X_1) \cdot P(C_2) = x \cdot (1 - y) + (1 - x) \cdot y = x + y - 2xy$$

La probabilidad de obtener una cara es:  $x + y - 2xy$

La probabilidad de obtener dos caras se obtiene de forma análoga.

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = x \cdot y$$

La probabilidad de obtener dos caras es:  $xy$



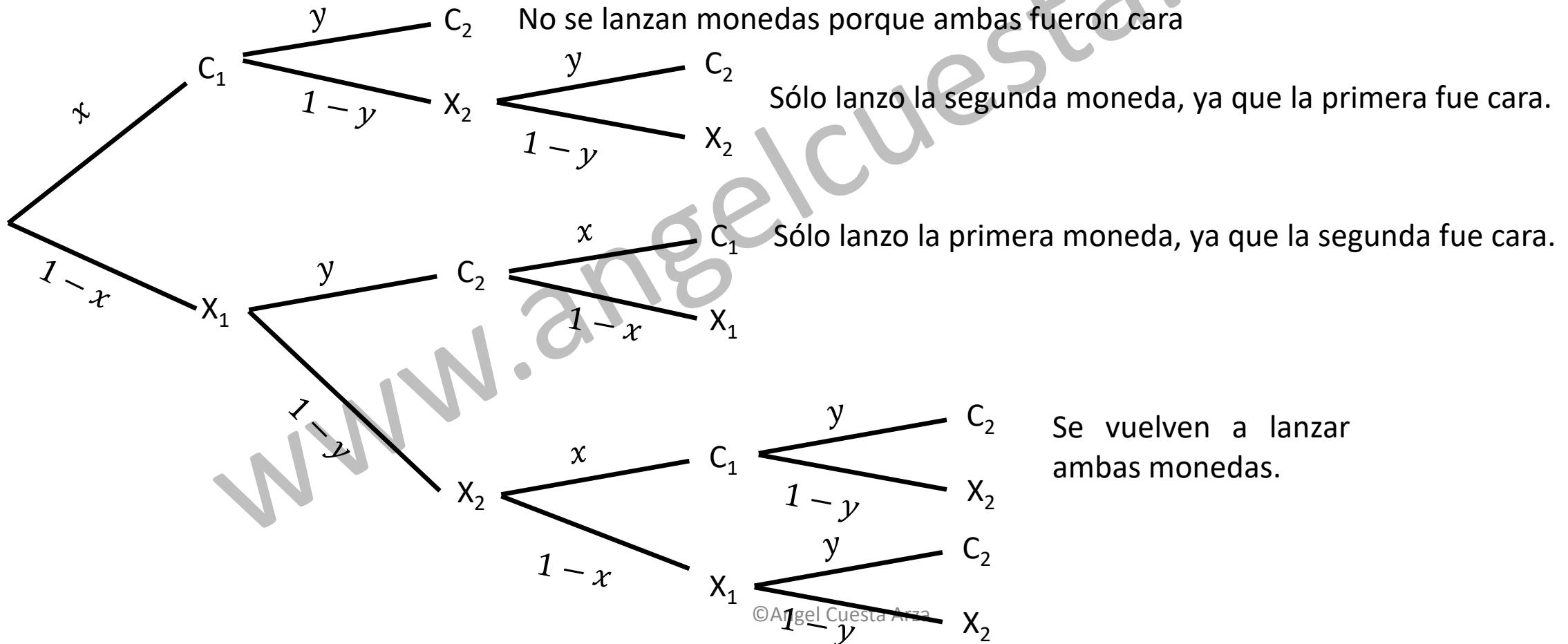
Comprueba que la suma de todas las probabilidades es igual a 1.



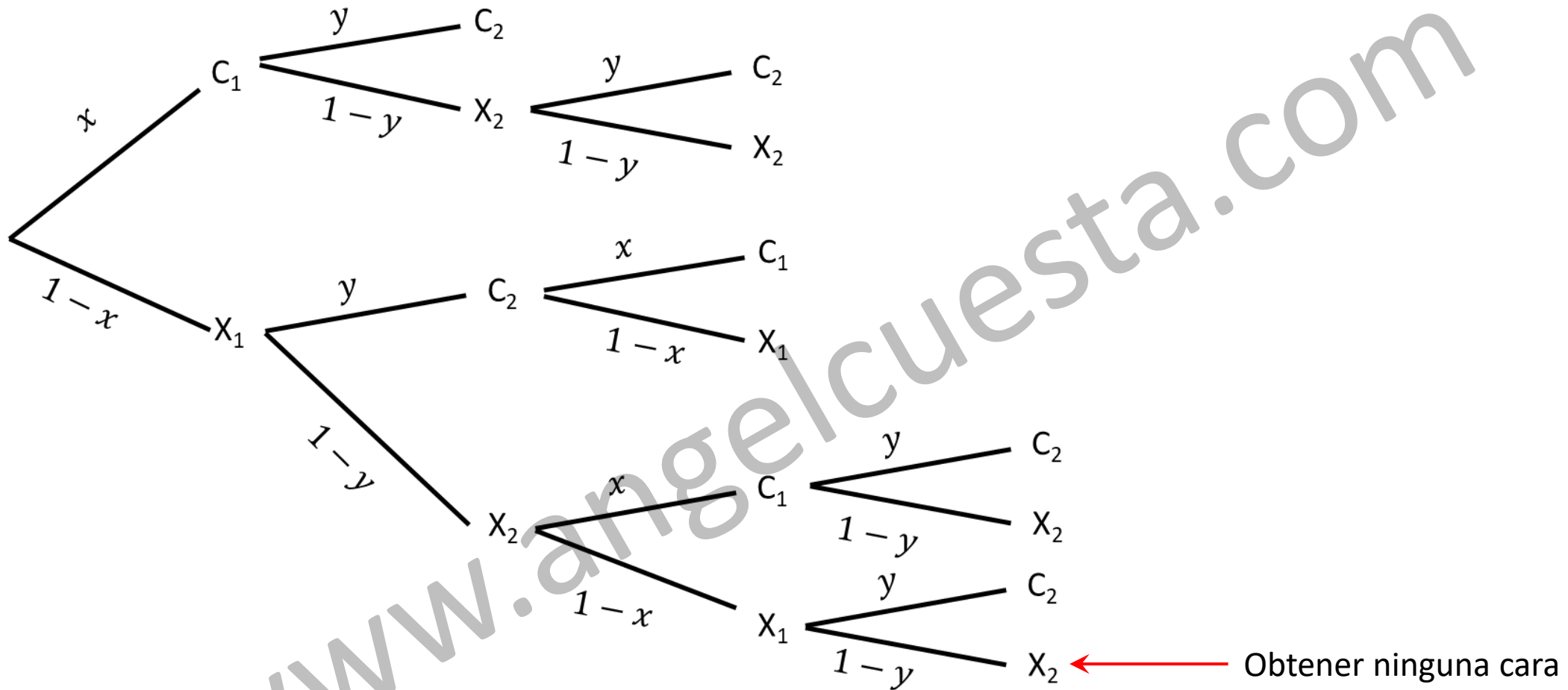
# PROBLEMA 7

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.

Debemos ampliar el diagrama de árbol con los nuevos posibles resultados.



# PROBLEMA 7

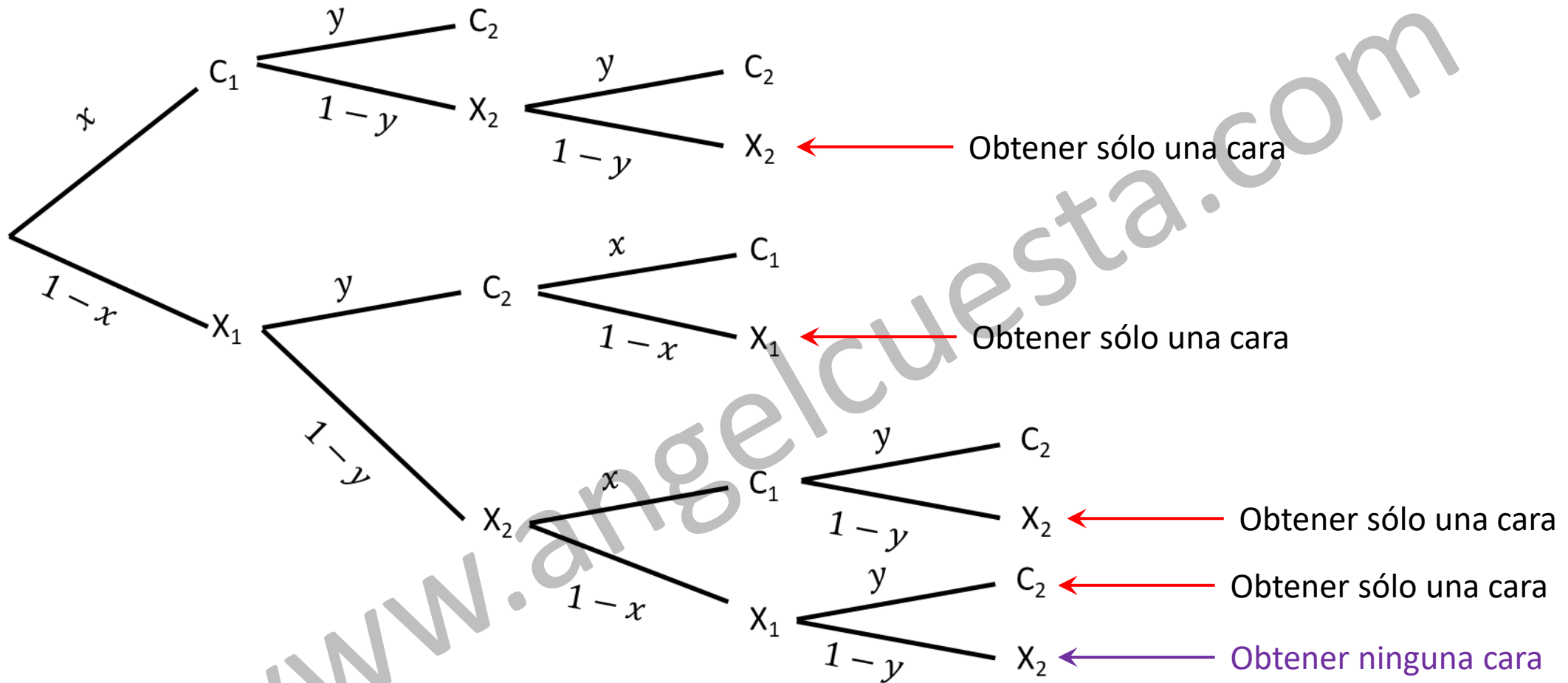


$$P(X_1 \cap X_2 \cap X_1 \cap X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_1) \cdot P(X_2) = (1-x) \cdot (1-y) \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

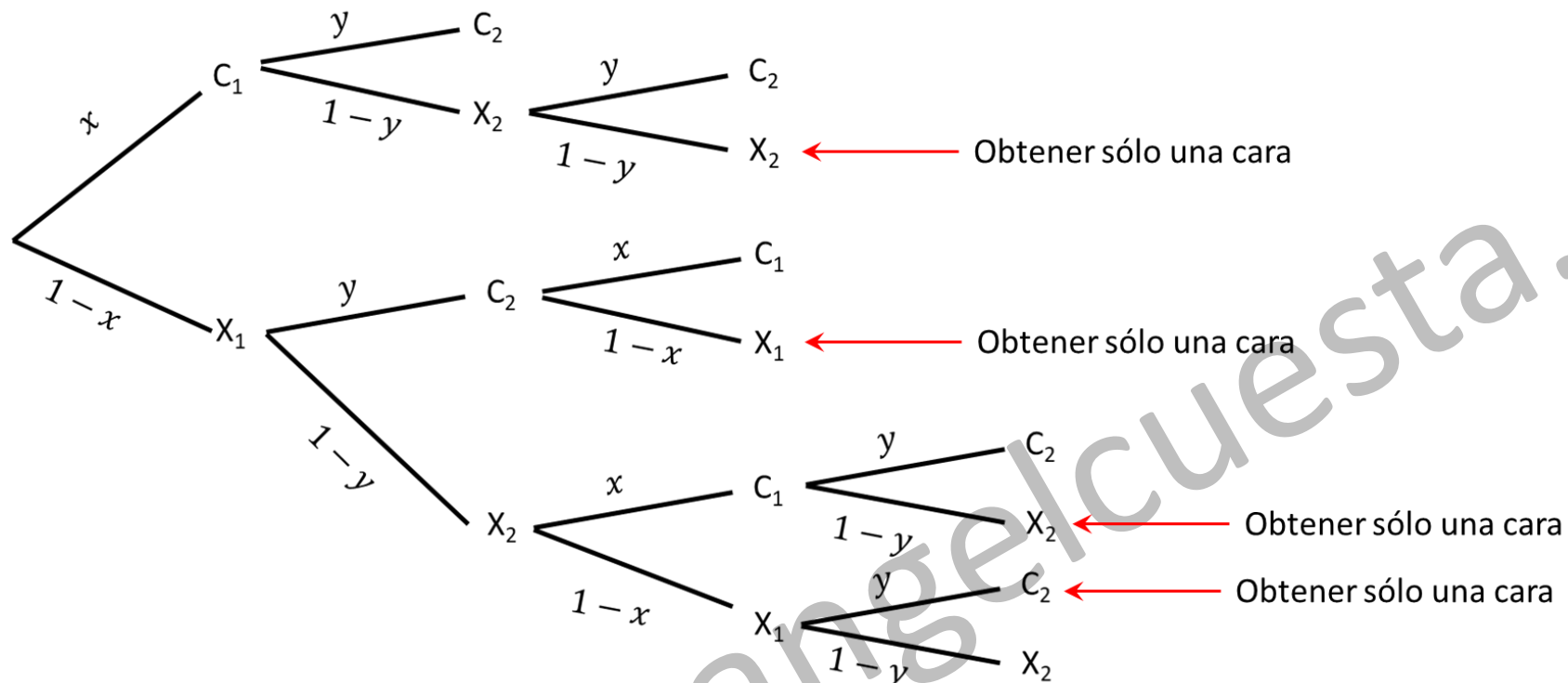
$$P(X_1 \cap X_2 \cap X_1 \cap X_2) = (1-x)^2 \cdot (1-y)^2$$

La probabilidad de no obtener ninguna cara es:  $(1-x)^2 \cdot (1-y)^2$

# PROBLEMA 7



# PROBLEMA 7



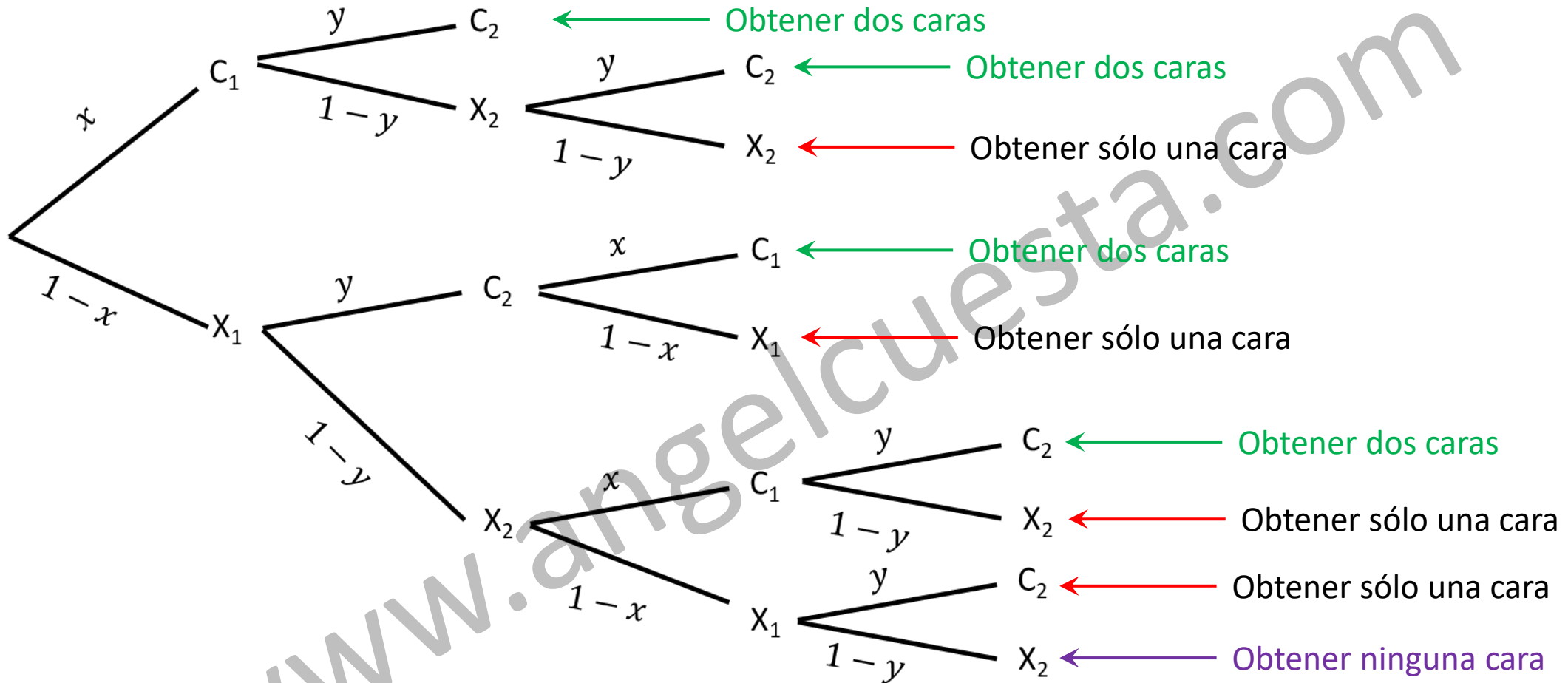
$$P(1 \text{ Cara}) = P(C_1 \cap X_2 \cap X_2) + P(X_1 \cap C_2 \cap X_1) + P(X_1 \cap X_2 \cap C_1 \cap X_2) + P(X_1 \cap X_2 \cap X_1 \cap C_2)$$

$$P(1 \text{ Cara}) = P(C_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_2) + P(X_1) \cdot P(C_2) \cdot P(X_1) + P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(C_1) \cdot P(X_2) + P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_1) \cdot P(C_2)$$

$$P(1 \text{ Cara}) = x \cdot (1-y)^2 + y \cdot (1-x)^2 + x \cdot (1-x) \cdot (1-y)^2 + y \cdot (1-y) \cdot (1-x)^2$$

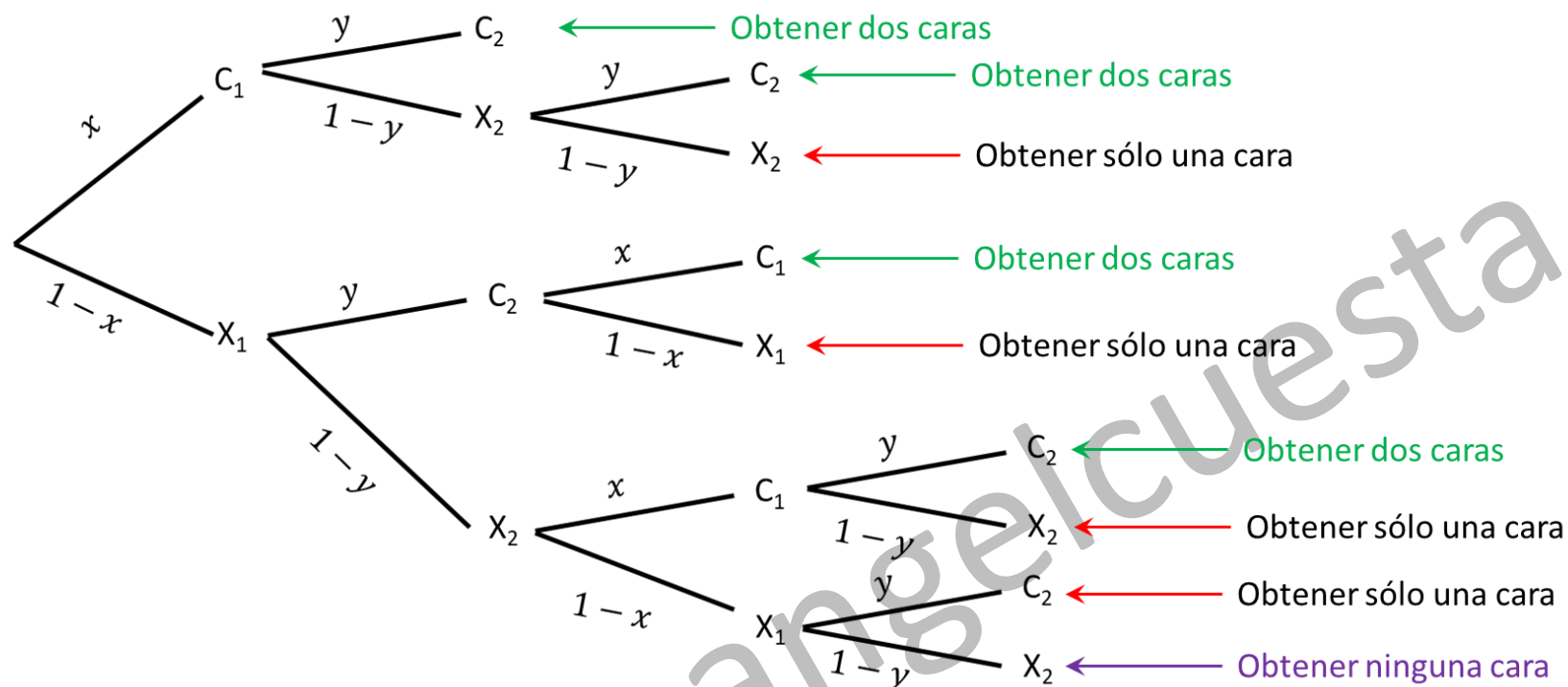
La probabilidad de obtener una cara es:  $x \cdot (1-y)^2 + y \cdot (1-x)^2 + x \cdot (1-x) \cdot (1-y)^2 + y \cdot (1-y) \cdot (1-x)^2$

# PROBLEMA 7



La probabilidad de obtener 2 caras son el resto de las posibilidades. Podría hacerse el cálculo teniendo en cuenta que la suma de todas las probabilidades es igual a 1, pero en este caso el proceso sería muy largo. Lo haré caso a caso como he hecho anteriormente.

# PROBLEMA 7



$$P(2 \text{ Caras}) = P(C_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap X_2 \cap C_2) + P(X_1 \cap C_2 \cap C_1) + P(X_1 \cap X_2 \cap C_1 \cap C_2)$$

$$P(2 \text{ Caras}) = P(C_1) \cdot P(C_2) + P(C_1) \cdot P(X_2) \cdot P(C_2) + P(X_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_1) + P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(C_1) \cdot P(C_2)$$

$$P(2 \text{ Caras}) = x \cdot y + x \cdot y \cdot (1 - y) + x \cdot y \cdot (1 - x) + x \cdot y \cdot (1 - x) \cdot (1 - y)$$

La probabilidad de obtener una cara es:  $x \cdot y + x \cdot y \cdot (1 - y) + x \cdot y \cdot (1 - x) + x \cdot y \cdot (1 - x) \cdot (1 - y)$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 8  
Probabilidad

# PROBLEMA 8

Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

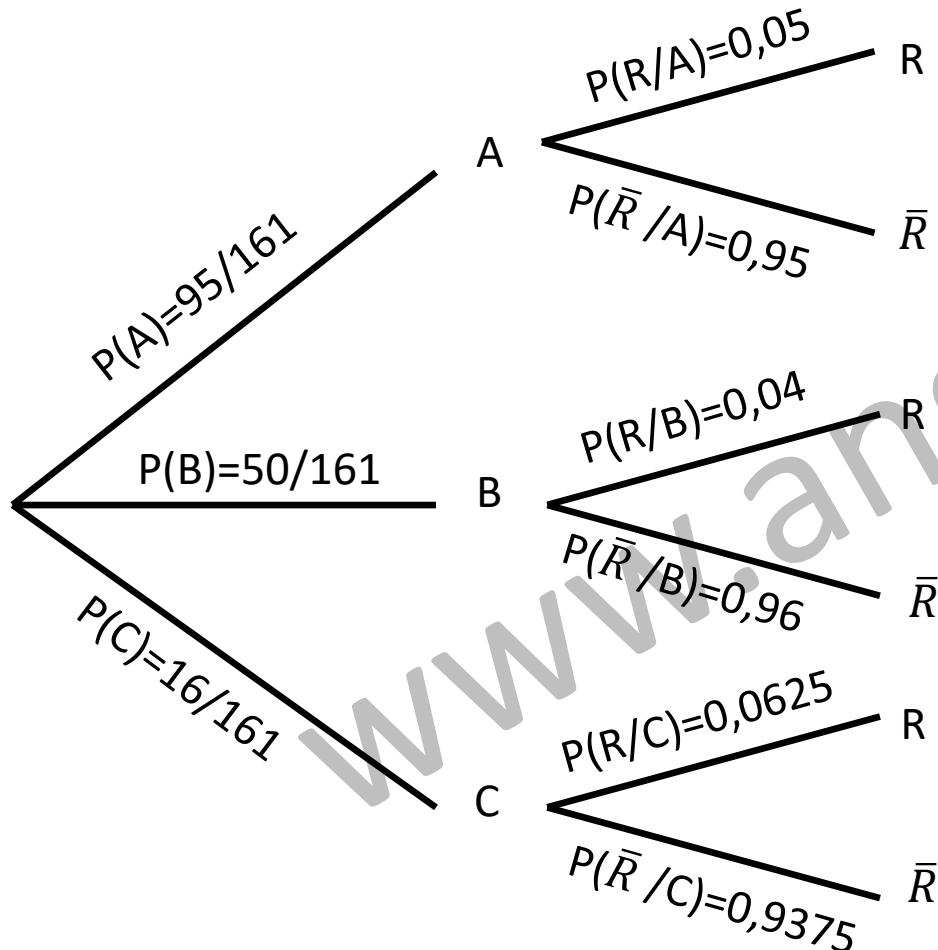
- a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.
- b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.



# PROBLEMA 8

**Solución:** Se construye el diagrama de árbol. Se definen los sucesos en primer lugar.

A=el vuelo llega desde España   B=el vuelo llega desde la UE   C=El vuelo llega desde fuera de la UE   R=Vuelo con retraso



De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

# PROBLEMA 8

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.

Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)$$

$$P(R) = \frac{95}{161} \cdot 0,05 + \frac{50}{161} \cdot 0,04 + \frac{16}{161} \cdot 0,0625 = \frac{31}{644} \approx 0,0481$$

La probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase es **31/644**.

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(B/R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B) \cdot P(R/B)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot 0,04}{\frac{31}{644}} = \frac{8}{31} \approx 0,2581$$

Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea es **8/31**.

