

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 1

Álgebra matricial/Sistemas de ecuaciones

# Problema 1

Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

- a) Estudiar cuándo la ecuación matricial  $A^2 \cdot X = B$  tiene solución en función del parámetro real  $m$ .
- b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.

**Solución:**

Se calcula en primer lugar la matriz  $A^2$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot m + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + m \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + m \cdot m + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + m \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot m + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

Se operan  $A^2$  y  $X$ .

$$A^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + (2 + 2m) \cdot y + 2 \cdot z \\ 0 \cdot x + (m^2 + 3) \cdot y + m \cdot z \\ 0 \cdot x + (3m) \cdot y + 3 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (2 + 2m)y + 2z \\ (m^2 + 3)y + mz \\ (3m)y + 3z \end{pmatrix}$$

# Problema 1

Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial  $A^2 \cdot X = B$  tiene solución en función del parámetro real  $m$ .

Se igualan las matrices de la ecuación.

$$\begin{pmatrix} x + (2 + 2m)y + 2z \\ (m^2 + 3)y + mz \\ (3m)y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices sean iguales, deben serlo todos sus términos  $a_{ij}$ .

$$\begin{cases} x + (2 + 2m)y + 2z = m \\ (m^2 + 3)y + mz = 0 \\ (3m)y + 3z = 9 \end{cases}$$

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 & m \\ 0 & m^2 + 3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

# Problema 1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de C en función de ***m*** utilizando su determinante.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 & m \\ 0 & m^2 + 3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de C es distinto de cero para todo valor de m, podemos afirmar que:

$$\boxed{Rg(C) = Rg(C^*) = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3 \rightarrow \text{el sistema es compatible determinado } \forall m \in R}$$

# Problema 1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.

Se podría despejar X utilizando las propiedades de la matriz inversa, pero calcular la inversa de  $A^2$  en función de m es muy tedioso, por eso prefiero resolver el sistema por la denostada (por algunos) regla de Cramer.

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2m & 2 & m \\ 0 & m^2 + 3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Recordamos que:  $|C| = 9$

$$x = \frac{|C_x|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 + 2m & 2 \\ 0 & m^2 + 3 & m \\ 9 & 3m & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{27m - 54}{9} = \frac{9 \cdot (3m - 6)}{9} = \boxed{3m - 6}$$

$$y = \frac{|C_y|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-9m}{9} = \boxed{-m}$$

$$z = \frac{|C_z|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 + 2m & m \\ 0 & m^2 + 3 & 0 \\ 0 & 3m & 9 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9m^2 + 27}{9} = \frac{9 \cdot (m^2 + 3)}{9} = \boxed{m^2 + 3}$$