

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 2

Álgebra matricial

Problema 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$,

- a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.
- b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 \cdot I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} .

Solución:

Se calcula en primer lugar la matriz B^T . $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se calcula el producto $A \cdot B^T$.

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se calcula $AB^T + I$. La matriz identidad debe ser de orden 2.

$$A \cdot B^T + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.

$$E = A \cdot B^T + I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Simplifico la nomenclatura de la matriz pedida.}$$

Calcularé la matriz inversa de E, mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|E|$; $|E| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz E **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(E) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(E))^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $E^{-1} = \frac{1}{|E|} \cdot (Adj(E))^t \longrightarrow E^{-1} = (AB^T + I)^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(AB^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Problema 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$,

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 \cdot I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} .

Se calcula el producto C^2 .

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \alpha \cdot (-\alpha^2) & 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot 0 \\ (-\alpha^2) \cdot 0 + 0 \cdot (-\alpha^2) & (-\alpha^2) \cdot \alpha + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quedando demostrado que: $C^2 = -\alpha^3 \cdot I$

Se calcula C^{13} en función de C^2 .

$$C^{13} = C^{2 \cdot 6 + 1} = (C^2)^6 \cdot C = (-\alpha^3 \cdot I)^6 \cdot C = \alpha^{18} \cdot C = \alpha^{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$