

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 4

Geometría

PROBLEMA 4

Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

- a) Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q .
- b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s .
- c) Obtener la proyección ortogonal del punto P y la recta r .

Solución:

Se sustituye el punto Q en la recta r para comprobar si verifica sus ecuaciones.

$$\begin{cases} 5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 0 = 16 \\ 9 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot 0 = 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 16 = 16 \\ 12 = 12 \end{cases} \quad \text{Por lo que podemos afirmar que } Q \in r$$

Se calcula el vector director de la recta que pasa por los puntos P y Q . $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,6,0) - (0,5,2) = (2,1,-2)$

Se escriben las ecuaciones paramétricas de s :

$$s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 4

Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s .

Las ecuaciones paramétricas de s son: $s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$ y su vector director es: $\vec{v}_s = (2, 1, -2)$

El vector director de r se calcula con el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen la recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 28\vec{j} - 14\vec{k} \equiv \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (1, 2, -1)$$

Los vectores se pueden simplificar.

El ángulo entre las rectas es el que forman los vectores directores.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 35,26^\circ$$

El ángulo que forman las rectas es **35,26°**

PROBLEMA 4

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P y la recta r .

Como ya disponemos del vector director de r ; $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$; y sabemos que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a r . Se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto P . $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$ $P = (0, 5, 2)$

2) Definimos un plano que pasa por P y tiene por vector normal, $\vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, -1)$.

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

$$1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 5) - 1 \cdot (z - 2) = 0 \rightarrow \text{El plano auxiliar es: } \pi: x + 2y - z - 8 = 0$$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. R (que es la proyección ortogonal pedida).

Se sustituye r en π :

$$x + 2y - z - 8 = 0 \rightarrow 2 + \lambda + 2 \cdot (6 + 2\lambda) - (-\lambda) - 8 = 0 \rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Se obtiene el punto Q , sustituyendo $\lambda = -1$ en r .

$$R: \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \\ z = -\lambda = -(-1) = 1 \end{cases}$$

La proyección ortogonal es $R = (1, 4, 1)$

