

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2023



Problema 5

Análisis de funciones e integrales

Problema 5

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ Obtener:

- a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y sus máximos y mínimos.
- c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: Para calcular el dominio se calcula el dominio de cada sumando.

$$\frac{1}{x} \rightarrow \text{Dom} \left(\frac{1}{x} \right) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\ln(x + 1) \rightarrow \text{Dom} (\ln(x + 1)) = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 > 0\} \longrightarrow \text{Dom} (\ln(x + 1)) = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$$

El dominio de $f(x)$ es la intersección de los dominios de ambos sumandos.



$$\text{Dom} \left(f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1) \right) = \{x \in \mathbb{R} / x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)\}$$

Problema 5

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$ Obtener: a) El dominio y **las asíntotas** de $f(x)$.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, estudiaremos el límite en los puntos conflictivos. En este caso $x = -1$ y $x = 0$.

Calculo los límites de la función en esos puntos.

$$\text{En } x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln(0) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln(0^-) = \nexists \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln(0^+) = -\infty \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = -1$ es asíntota vertical de $f(x)$ cuando x tiende a -1 por la derecha.

$$\text{En } x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0} + \ln(1) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0^-} + \ln(1^-) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0^+} + \ln(1^+) = +\infty \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = 0$ es asíntota vertical de $f(x)$

Problema 5

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ Obtener: a) El dominio y **las asíntotas** de $f(x)$.

La **asíntota horizontal** se calcula haciendo el límite cuando x tiende a más infinito. No es necesario hacer el límite cuando x tiende a menos infinito porque la función no está definida para números menores que -1 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \ln(x + 1) = \frac{1}{+\infty} + \ln(+\infty + 1) = +\infty$$

por lo tanto $f(x)$ no tiene asíntota horizontal.

Al no tener la función asíntota horizontal, debemos comprobar si tiene asíntota oblicua. $y = m \cdot x + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{x} + \ln(x + 1)}{x} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1}}{1} = \frac{\frac{-1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty + 1}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

por lo tanto $f(x)$ no tiene asíntota oblicua.

Problema 5

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ Obtener:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y sus máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+x^2}{x^2 \cdot (x+1)} = \frac{x^2-x-1}{x^2 \cdot (x+1)}$$

Iguamos la derivada a cero la derivada y resolvemos la ecuación.

$$\frac{x^2-x-1}{x^2 \cdot (x+1)} = 0 \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
$f(x)$					

Problema 5

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ Obtener:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y sus máximos y mínimos.

	-1	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$					

$f(x)$ es creciente si $x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

$f(x)$ es decreciente si $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Máximo relativo en $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $f\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \approx -2,58 \longrightarrow$ Máximo; $M = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -2,58\right)$

Mínimo relativo en $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 1,58 \longrightarrow$ Mínimo; $m = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1,58\right)$

Problema 5

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ Obtener:

c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$.

Puesto que la función es positiva entre $x=1$ y $x=2$, el valor del área será igual al de la integral definida de $f(x)$ entre $x=1$ y $x=2$.

Se calcula la función primitiva en primer lugar.

$$\int \left(\frac{1}{x} + \ln(x + 1) \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \ln(x + 1) dx = \ln|x| + \int \ln(x + 1) dx$$

La integral del logaritmo neperiano se debe resolver mediante la técnica de integración por partes.

$$\int \ln(x + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x + 1) \rightarrow du = \frac{1}{x + 1} dx \\ dv = 1 dx \rightarrow v = \int 1 dx = x \end{array} \right\} = x \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x}{x + 1} dx$$

Para resolver la integral del cociente, sumo y resto 1 al numerador.

$$\int \ln(x + 1) dx = x \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x + 1 - 1}{x + 1} dx = x \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x + 1}{x + 1} - \frac{1}{x + 1} dx$$

Problema 5

$$\int \ln(x+1)dx = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - \int 1dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int \ln(x+1)dx = x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \ln|x| + x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

Una vez calculada la función primitiva, ya podemos aplicar la regla de Barrow.

$$\text{Área} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = F(2) - F(1)$$

$$F(2) = \ln|2| + 2 \cdot \ln(2+1) - 2 + \ln|2+1| = \ln(2) + 2 \cdot \ln(3) - 2 + \ln(3) = 3 \cdot \ln(3) + \ln(2) - 2$$

$$F(1) = \ln|1| + 1 \cdot \ln(1+1) - 1 + \ln|1+1| = 0 + \ln(2) - 1 + \ln(2) = 2 \cdot \ln(2) - 1$$

$$\text{Área} = (3 \cdot \ln(3) + \ln(2) - 2) - (2 \cdot \ln(2) - 1) = 3 \cdot \ln(3) - \ln(2) - 1 \approx 1,603 \text{ u}^2$$

El área encerrada es **1,603 unidades de área**, aproximadamente.