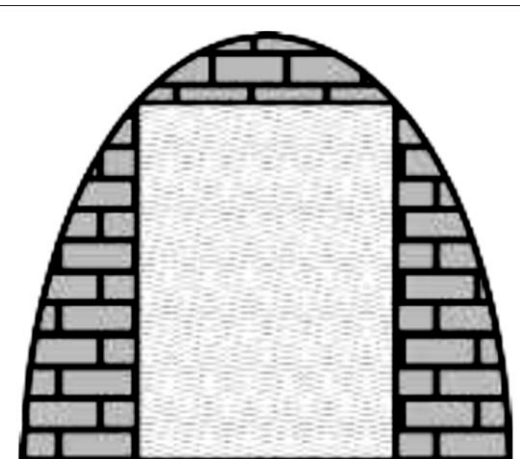


Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2023



Problema 6
Problema de optimización

PROBLEMA 6

El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

- Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.
- Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

Solución:

En primer lugar, se definen en función de x los vértices del rectángulo. Para ver los límites en los que se mueve x , calculo los puntos de corte con los ejes de la función.

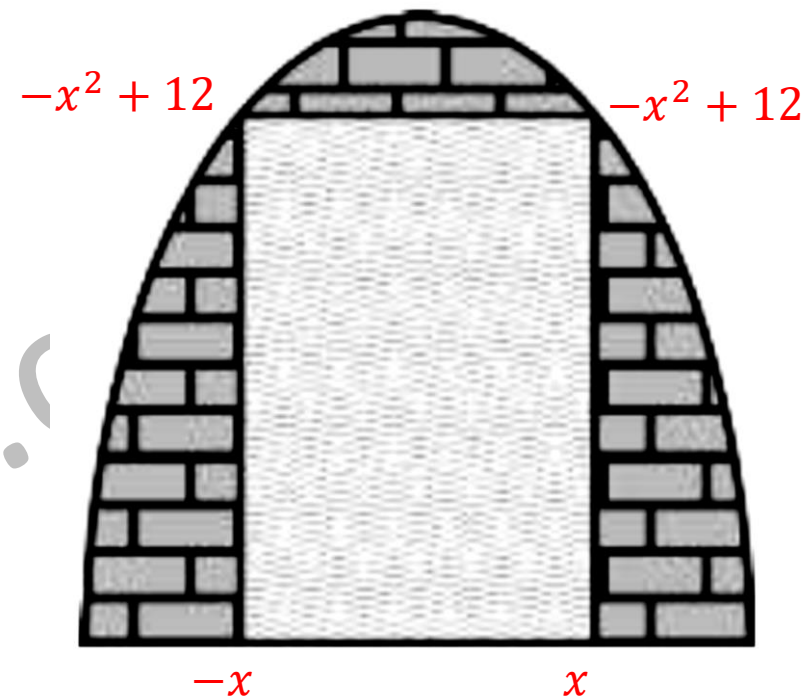
$$-x^2 + 12 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

A continuación, se define la función que nos proporciona la superficie de la puerta.

$$f(x) = 2x \cdot (-x^2 + 12); \quad 0 < x < \sqrt{12}$$

Opero la función para derivarla más fácilmente. Para calcular el máximo de la función, se deriva e iguala a cero.

$$f(x) = -2x^3 + 24x \longrightarrow f'(x) = -6x^2 + 24 \xrightarrow{\quad} -6x^2 + 24 = 0 \xrightarrow{\quad} x = \pm 2 \xrightarrow[0 < x < \sqrt{12}]{\quad} x = 2$$



PROBLEMA 6

a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

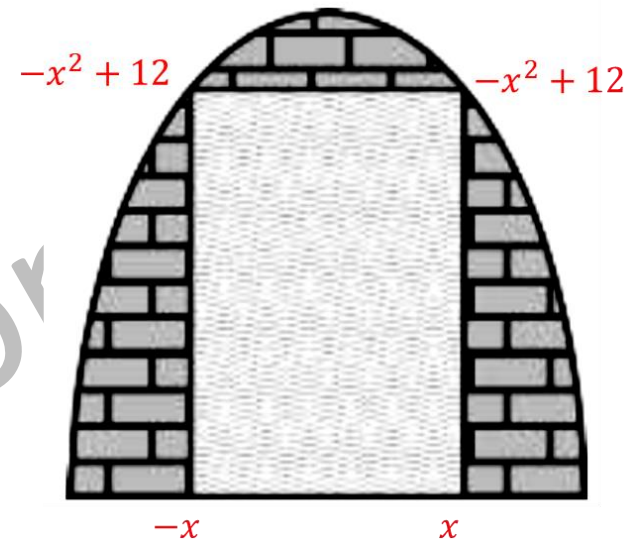
Para determinar si $x=2$ nos proporciona la superficie máxima o mínima, utilizaré el criterio de la segunda derivada. Utilizo este método, ya que en este caso es fácil obtener la función segunda derivada.

$$f'(x) = -6x^2 + 24 \longrightarrow f''(x) = -12x \longrightarrow f''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0$$

Por ser el valor de la segunda derivada en el valor crítico negativo, podemos afirmar que **$x=2$ maximiza la función.**

Se calcula el valor de la altura de la puerta. $y(2) = -2^2 + 12 = 8$

La puerta de máxima superficie tendrá una **base de 4 metros**, una **altura de 8 metros**.



PROBLEMA 6

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

Se calcula la superficie de la puerta utilizando la función utilizada antes. $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = 32$

La superficie máxima que puede tener la puerta es **32 m²**.

Se calcula el área total bajo la curva en $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ utilizando la integral y la regla de Barrow.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} (-x^2 + 12) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x \right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} = \left[-\frac{(\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (\sqrt{12}) \right] - \left[-\frac{(-\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (-\sqrt{12}) \right] \\ A &= -\frac{(\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (\sqrt{12}) + \frac{(-\sqrt{12})^3}{3} + 12 \cdot (\sqrt{12}) = -\frac{2 \cdot (\sqrt{12})^3}{3} + 24 \cdot (\sqrt{12}) = -\frac{24 \cdot (\sqrt{12})}{3} + 24 \cdot (\sqrt{12}) \\ A &= \frac{-24 \cdot (\sqrt{12}) + 72 \cdot (\sqrt{12})}{3} = \frac{48 \cdot (\sqrt{12})}{3} = 16 \cdot (\sqrt{12}) = 32 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ya disponemos del área total, en la siguiente diapositiva termino el ejercicio.

PROBLEMA 6

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

El área bajo la curva (pared y puerta) es $32 \cdot \sqrt{3}$ unidades de área.

La superficie de la puerta es 32 unidades de área.

La superficie de la pared es la diferencia entre el área total y el área de la puerta.

$$A = 32 \cdot \sqrt{3} - 32 = 32 \cdot (\sqrt{3} - 1) \text{ unidades de área}$$

La superficie recubierta de pared es $32 \cdot (\sqrt{3} - 1) \text{ m}^2$.

