

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 1

Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



Problema 1

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

Solución: Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de m utilizando su determinante. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 6$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado. $-m^2 + m + 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$

Si $m \neq -2$ y $m \neq 3$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $m = -2$ o $m = 3$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de m en las matrices.

Problema 1

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de m . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Si $m = -2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}]{\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{¡ OJO !}}]{F_3=F_3+4F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$

A A

F_2	2	-2	-1	-6
$2F_1$	-2	2	2	-4
$F_2=F_2+2F_1$	0	0	1	-10

F_3	0	0	-4	10
$4F_2$	0	0	4	-40
$F_3=F_3+4F_2$	0	0	0	-30

F_3	-3	3	-1	4
$-3F_1$	3	-3	-3	6
$F_3=F_3-3F_1$	0	0	-4	10

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $m = -2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$.**

Problema 1

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Si $m = 3 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+2F_1}]{\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	2	3	-1	9
$2F_1$	-2	2	2	6
$F_2=F_2+2F_1$	0	5	1	15

F_3	0	5	1	15
$-F_2$	0	5	1	15
$F_3=F_3-F_2$	0	0	0	0

F_3	2	3	-1	9
$2F_1$	-2	2	2	6
$F_3=F_3+2F_1$	0	5	1	15

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las dos filas linealmente independientes. Para $m = 3$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Problema 1

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $m \neq -2$ y $m \neq 3$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $m = 3$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $m = -2$	2	3	3	S.I.	Sin solución

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Para resolver el sistema de ecuaciones aprovecharemos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior para $m=3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 5y + z = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 3 \\ y = \lambda; z = 15 - 5\lambda \end{cases} \rightarrow -x + \lambda + 15 - 5\lambda = 3 \rightarrow x = -4\lambda + 12$$

La solución del sistema para $m = 3$ es:

$$\begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



Cálculo de la matriz inversa



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

- a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .
- b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$.
- c) Para $m = 0$, calcular A^5 .

Solución: Calculo el rango de A en función de m utilizando su determinante. En este caso, es fácil obtener el determinante desarrollando por la fila 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m \cdot (m - m^2) = m^2 \cdot (1 - m) \quad \text{Se iguala a cero y se resuelve la ecuación.}$$

$$m^2 \cdot (1 - m) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran**(A) = 3

Si $m = 0$ o $m = 1$ entonces $|A| = 0$, **Ran**(A) < 3 $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A sustituyendo los valores de m en la matriz.

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .

Sustituyo por $m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Busco un menor que sea distinto de cero. En este caso es α_{23} $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \longrightarrow$ Si $m = 0$, **Ran(A) = 2**

Sustituyo por $m = 1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Busco un menor que sea distinto de cero. En este caso es α_{33} $\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \longrightarrow$ Si $m = 1$, **Ran(A) = 2**

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3**

Si $m = 0$, **Ran(A) = 2**

Si $m = 1$, **Ran(A) = 2**

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. Sustituyo por $m = -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se despeja la ecuación matricial. $A \cdot X = B \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Se calcula la matriz inversa de A mediante el método de los adjuntos.

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. Se continúa con el cálculo de la matriz inversa.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. Sustituyo por $m = -1 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener: c) Para $m = 0$, calcular A^5 .

Al sustituir la matriz quedará: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculo en primer lugar las potencias cuadrada y cúbica. A partir de esos datos, calcularé A^5 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 3
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



PROBLEMA 3

Se considera la recta: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide

a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r .

Solución: El vector director de la recta r es: $\vec{v} = (2, 3, -1)$

El vector normal del plano π es: $\vec{n} = (3, -m, 1)$

La recta y el plano serán paralelos o, bien, la recta estará contenida en el plano si $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares.

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-m) + (-1) \cdot 1 = 5 - 3m = 0$$

$m = \frac{5}{3}$ Para este valor de m la recta y el plano serán paralelos o la recta estará contenida en el plano.

Para ver cuál de las dos posibilidades es la que se verifica para dicho valor de m , se toma un punto de la recta r y se comprueba si pertenece al plano o no. El punto será $P = (1, -1, -2)$.

$$m = \frac{5}{3} \longrightarrow 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \xrightarrow{P = (1, -1, -2)} 3 \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot (-1) - 2 = 1 \longrightarrow \frac{8}{3} \neq 1$$

Para $m = 5/3$ la recta y el plano son paralelos. La recta **no está contenida en el plano para ningún valor de m .**

PROBLEMA 3

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r .

OJO: A pesar de que dice "los valores", hay un solo valor: $m = \frac{5}{3}$

La ecuación del plano se obtuvo anteriormente. $3x - \frac{5}{3}y + z = 1$

Un plano paralelo tendrá el mismo vector normal $\vec{n} = \left(3, -\frac{5}{3}, 1\right)$ y su ecuación será: $3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0$

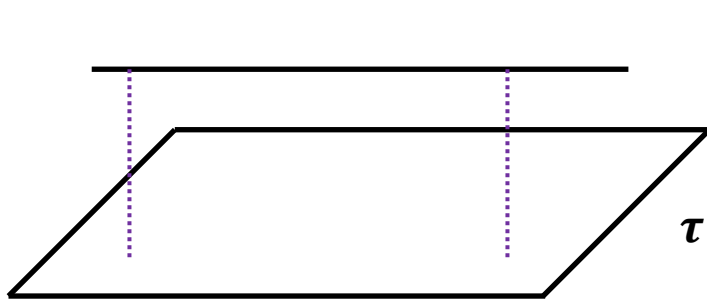
Para que contenga a la recta r , debe pasar por un punto de ella: $P = (1, -1, -2)$.

$$3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0 \xrightarrow{P = (1, -1, -2)} 3 \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot (-1) - 2 + D = 0 \longrightarrow \frac{8}{3} + D = 0 \longrightarrow D = -\frac{8}{3}$$

La ecuación del plano paralelo a π que contiene a r es: $\sigma: 3x - \frac{5}{3}y + z - \frac{8}{3} = 0$

PROBLEMA 3

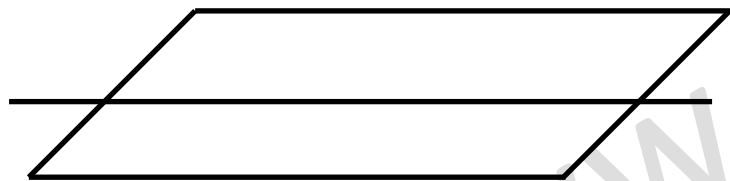
Para aclarar los dos apartados anteriores, se muestran unos esquemas de lo que acabamos de calcular.



Paralelos

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

$$\tau: 3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0; D \neq -\frac{8}{3}$$



Recta incluida en el plano

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

$$\sigma: 3x - \frac{5}{3}y + z - \frac{8}{3} = 0$$

PROBLEMA 3

c) Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$.

Se puede calcular la distancia de P al plano π : $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Siendo la ecuación del plano π : $\pi: 3x - my + z = 1 \longrightarrow \pi: 3x - my + z - 1 = 0$

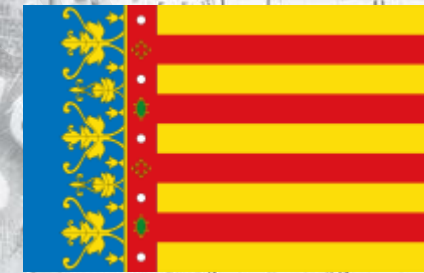
$$d = \frac{|3 \cdot 1 - m \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}} \text{ unidades de longitud}$$

La distancia es: $\frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$ unidades de longitud.

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 4
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



PROBLEMA 4

Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

- a) Calcular la ecuación de la recta r .
- b) Calcular la ecuación del plano que contiene al rectángulo.
- c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

Solución: Calculo el vector que va desde de P hasta Q. Este vector es el mismo que el vector director de la recta pedida ya que ambas rectas son paralelas.

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,3,1) - (2,1,3) = (-1,2,-2)$$

Escribo las ecuaciones paramétricas sabiendo que la recta pasa por R: $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

La ecuación de la recta pedida es:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 4

Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

El plano que contiene al rectángulo es aquel que pasa por los puntos P y Q y R .

Calculo primero los dos vectores directores del plano $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:

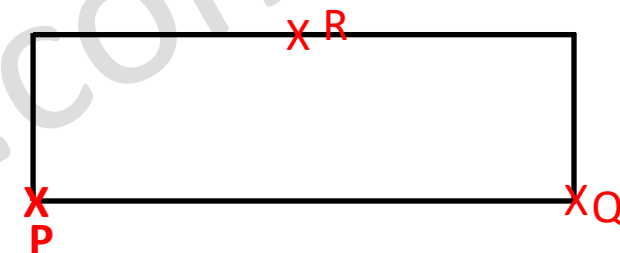
$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,3,1) - (2,1,3) = (-1,2,-2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = R - P = (4,7,6) - (2,1,3) = (2,6,3)$$

Calculo la ecuación general del plano mediante determinantes.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 18x - y - 10z - 5 = 0$$

La ecuación del plano que contiene al rectángulo es: $\pi: 18x - y - 10z - 5 = 0$



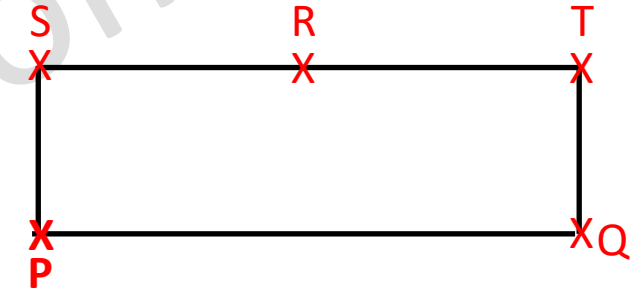
PROBLEMA 4

Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

Se calcula en primer lugar la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r . De esta forma se obtiene el punto S .

Se calcula un plano auxiliar que contenga al punto P y que sea perpendicular a la recta r . El vector normal de dicho plano es igual que el director de r .



$$\vec{v} = \vec{n} = (-1, 2, -2) \quad P = (2, 1, 3)$$

Se calcula la ecuación del plano mediante la fórmula: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$-1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) - 2 \cdot (z - 3) = 0 \longrightarrow -x + 2 + 2y - 2 - 2z + 6 = 0 \longrightarrow -x + 2y - 2z + 6 = 0$$

Se calcula la intersección del plano auxiliar con la recta r . $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

$$-(4 - \lambda) + 2 \cdot (7 + 2\lambda) - 2 \cdot (6 - 2\lambda) + 6 = 0 \longrightarrow 4 + 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{4}{9}$$

PROBLEMA 4

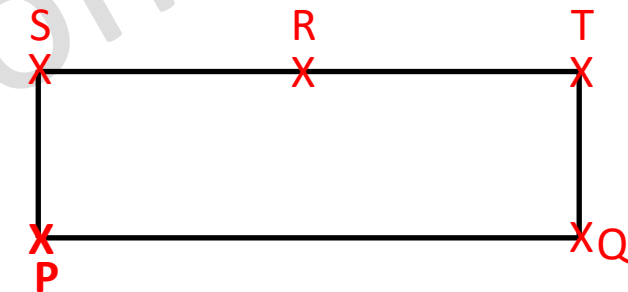
Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

Se sustituye el valor de λ en la ecuación de la recta r .

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda = -\frac{4}{9}} S: \begin{cases} x = \frac{40}{9} \\ y = \frac{55}{9} \\ z = \frac{62}{9} \end{cases}$$

Uno de los puntos del rectángulo es: $S = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$



Se hace el mismo procedimiento para calcular las coordenadas del punto T .

PROBLEMA 4

Se calcula un plano auxiliar que contenga al punto Q y que sea perpendicular a la recta r . El vector normal de dicho plano es igual que el director de r .

$$\vec{v} = \vec{n} = (-1, 2, -2) \quad Q = (1, 3, 1)$$

Se calcula la ecuación del plano mediante la fórmula: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 3) - 2 \cdot (z - 1) = 0 \longrightarrow -x + 1 + 2y - 6 - 2z + 2 = 0 \longrightarrow -x + 2y - 2z - 3 = 0$$

Se calcula la intersección del plano auxiliar con la recta r . $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

$$-(4 - \lambda) + 2 \cdot (7 + 2\lambda) - 2 \cdot (6 - 2\lambda) - 3 = 0 \longrightarrow -5 + 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{5}{9}$$

Se sustituye el valor de λ en la ecuación de la recta r . $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda = \frac{5}{9}} T: \begin{cases} x = \frac{31}{9} \\ y = \frac{73}{9} \\ z = \frac{44}{9} \end{cases}$

Los dos vértices del rectángulo son: $S = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ $T = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 5
Análisis de funciones

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

Solución: Se hace el ejercicio para $k \neq 0$. Si $k = 0$, $f(x) = 0$ y no tendría sentido el ejercicio.

Se igual el denominador a cero para comprobar si hay valores de x que estén fuera del dominio.

$e^{2x} = 0 \longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \text{ que verifique la ecuación.}$

$$\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}}$$

La función no tiene asíntotas verticales, ya que está definida en todos los números reales.

Se calcula si $f(x)$ tiene asíntota horizontal calculando los límites cuando x tiende a más y menos infinito.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = 0$ Ya que el orden del infinito del denominador es mayor que el del numerador. También podría utilizarse la regla de L'Hôpital.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}}$ Calculo el valor del límite y luego lo multiplicaré por k .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$ El valor del límite dependerá del signo de k .

Continúo el razonamiento en la siguiente diapositiva.

Problema 5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$$\text{Si } k > 0: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = k \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{Si } k < 0: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = k \cdot (-\infty) = +\infty$$

$\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}; y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

Puesto que $f(x)$ tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$, **no tendrá asíntota oblicua** en ese caso.

$f(x)$ **no tiene asíntota horizontal** cuando x tiende a $-\infty \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Puesto que $f(x)$ **NO tiene asíntota horizontal** cuando x tiende a $-\infty$, debo comprobar si tiene asíntota oblicua en ese caso.

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) **Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.** Se comprueba si la función tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

La ecuación de la posible asíntota oblicua sería: $y = m \cdot x + n$

Se calcula la pendiente de la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{x \cdot e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}$$

$$\text{Si } k > 0: \quad m = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = k \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{Si } k < 0: \quad m = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = k \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

$f(x)$ NO tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Se calcula la función derivada y se iguala a cero. A continuación, se hace un estudio de signos de la derivada.

$$f'(x) = \frac{k \cdot e^{2x} - kx \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \cdot (k - 2kx)}{(e^{2x})^2} = \frac{k \cdot (1 - 2x)}{e^{2x}}$$

$$\frac{k \cdot (1 - 2x)}{e^{2x}} = 0 \longrightarrow k \cdot (1 - 2x) = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{Recuerda que } k \neq 0$$

Debemos analizar la monotonía para los casos: $k > 0$ y $k < 0$, ya que el signo de la derivada depende del signo de k .

Problema 5

$$f'(x) = \frac{k \cdot (1 - 2x)}{e^{2x}}$$

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Si $k > 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

$$f'(0) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 0)}{e^{2 \cdot 0}} = k > 0; \text{Creciente}$$

$$f'(1) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 1)}{e^{2 \cdot 1}} = -k < 0; \text{Decreciente}$$

Si $k < 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

$$f'(0) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 0)}{e^{2 \cdot 0}} = k < 0; \text{Decreciente}$$

$$f'(1) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 1)}{e^{2 \cdot 1}} = -k > 0; \text{Creciente}$$

Si $k > 0$, $f(x)$ es creciente si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y es decreciente si $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Si $k < 0$, $f(x)$ es decreciente si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y es creciente si $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Si $k > 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k \cdot \frac{1}{2}}{e^{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

Si $k > 0$, $f(x)$ tiene un máximo relativo: $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$

Si $k < 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k \cdot \frac{1}{2}}{e^{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

Si $k < 0$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo: $m = \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $(-1,1)$

Utilizaremos el teorema de Bolzano para demostrar dicho resultado. El teorema de Bolzano establece que si una función continua en un intervalo $[a, b]$, denotada como $f(x)$, toma valores con signos opuestos en dos puntos a y b (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto c en el intervalo (a, b) donde $f(c) = 0$.

En primer lugar, podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y por lo tanto también lo es en el intervalo $[-1,1]$.

$$\text{Por otro lado: } f(-1) = \frac{-k}{e^{-2}} = -k \cdot e^2 \quad f(1) = \frac{k}{e^2} = k \cdot e^{-2}$$

Verifico la segunda condición: $f(-1) \cdot f(1) < 0$

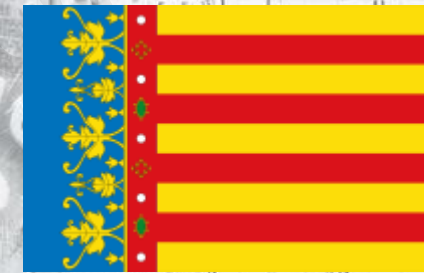
$$f(-1) \cdot f(1) = -k \cdot e^2 \cdot k \cdot e^{-2} = -k^2 < 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto, **existe un valor c que pertenece al intervalo $(-1, 1)$, tal que $f(c) = 0$** , y, por consiguiente, garantizamos que la función se anula para al menos un valor de dicho intervalo.

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 6
Integrales



Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



PROBLEMA 6

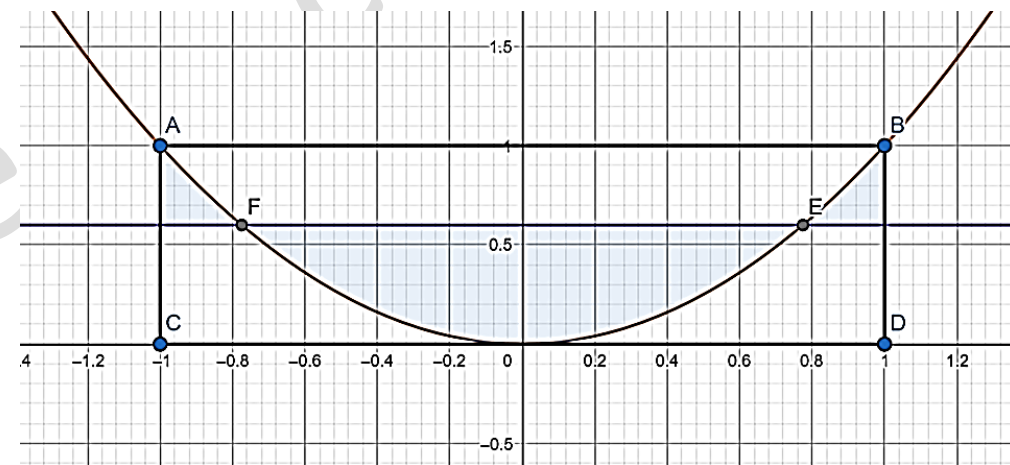
Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R .

Solución: Se hace un esquema con los datos del problema.

El área coloreada es igual a un tercio del área total del rectángulo.

El área del rectángulo es: $A_{rect} = 2 \cdot 1 = 2 u^2$

El área coloreada está repartida en 3 zonas. Al ser las funciones $f(x)$ y $g(x)$ pares, podemos calcular el área entre el origen y E y después el área entre E y B . Después bastará multiplicar por dos para obtener el área total.



Se calculan los puntos de corte entre ambas funciones, para ello se igualan. $x^2 = a \longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Los dos puntos de corte de las gráficas son: $F = (-\sqrt{a}, a)$ y $E = (\sqrt{a}, a)$

Utilizo estos valores para calcular el valor del área coloreada.

PROBLEMA 6

Tal como he dicho antes voy a calcular sólo el área coloreada para valores de x mayores que cero.

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}}$$

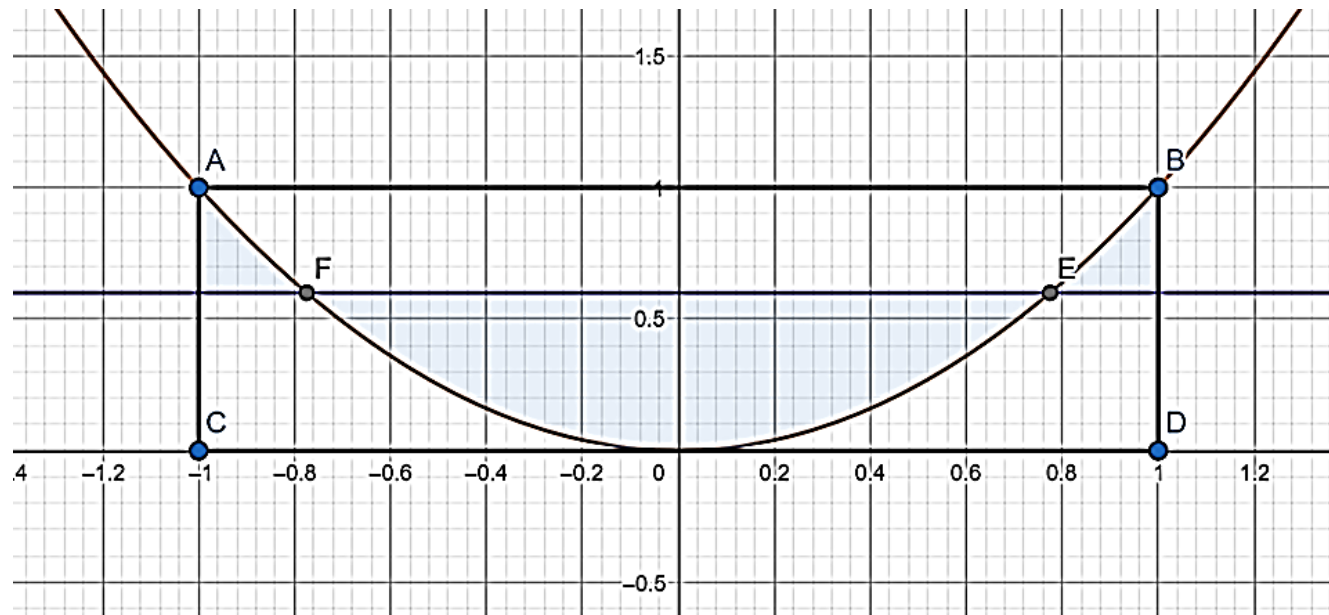
$$A_1 = \left(a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) - 0 = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{\sqrt{a}}^1 = \left(\frac{1}{3} - a \right) - \left(\frac{(\sqrt{a})^3}{3} - a\sqrt{a} \right) = \frac{1}{3} - a - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

Para calcular el área total entre la curva y el rectángulo debo multiplicar por 2 la suma de las áreas.

$$A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot \left(\frac{2a\sqrt{a}}{3} + \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{4a\sqrt{a} + 1}{3} - a \right)$$

Se iguala el valor del área total y se igual a $2/3$, que es la tercera parte del área del rectángulo.



PROBLEMA 6

Se iguala el valor del área total y se igual a $2/3$, que es la tercera parte del área del rectángulo.

$$2 \cdot \left(\frac{4a\sqrt{a} + 1}{3} - a \right) = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{4a\sqrt{a} + 1}{3} - a = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4a\sqrt{a} + 1 - 3a}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4a\sqrt{a} + 1 - 3a}{3} = \frac{1}{3}$$

$$4a\sqrt{a} + 1 - 3a = 1 \longrightarrow 4a\sqrt{a} - 3a = 0 \longrightarrow a \cdot (4\sqrt{a} - 3) = 0 \xrightarrow{0 < a < 1} 4\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$4\sqrt{a} = 3 \longrightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{4} \longrightarrow a = \frac{9}{16}$$

El valor de a es **9/16**.

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 7

Probabilidad-Distribución binomial

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

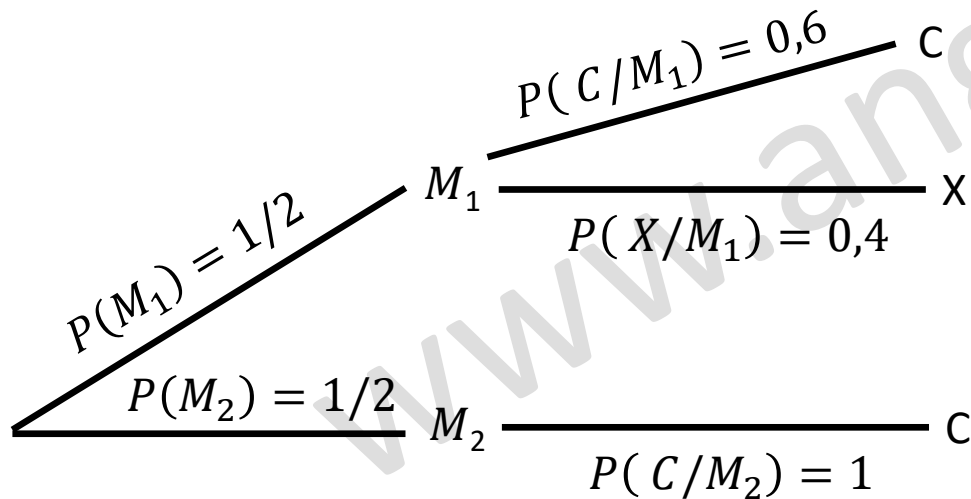
PROBLEMA 7

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0,6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

Solución: Se construye el diagrama de árbol.



Se definen los sucesos:

M_1 =se elige la moneda trucada con cara y cruz.

M_2 =se elige la moneda con dos caras.

C =al lanzar la moneda, sale cara.

X =al lanzar la moneda, sale cruz.

Continúo en la siguiente diapositiva.

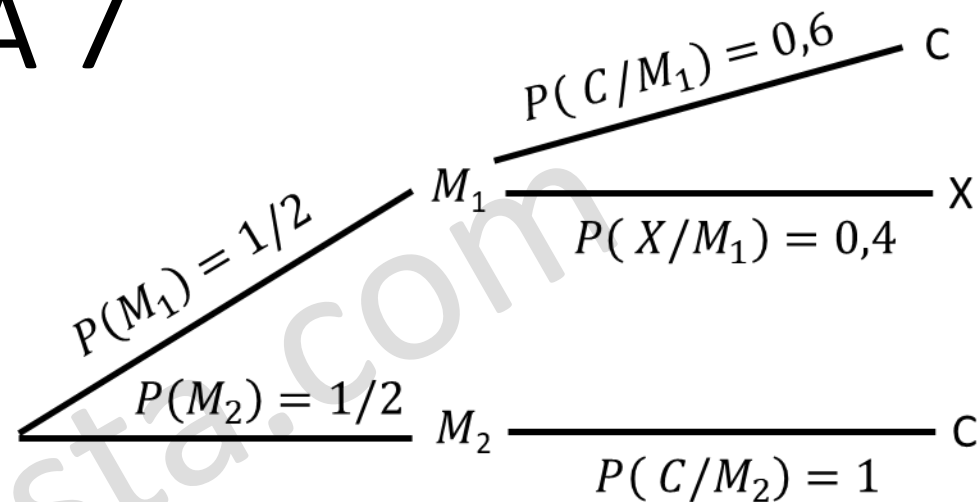
PROBLEMA 7

Se calcula la probabilidad de que salga cara en la primera elección.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(M_1) \cdot P(C/M_1) + P(M_2) \cdot P(C/M_2)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,8$$



Se repite 3 veces el experimento. Como los sucesivos experimentos son independientes entre sí y dicho experimento sólo tiene dos posibles resultados (salir cara o salir cruz), podemos decir que el número de caras sigue una distribución binomial.

Siendo Y el número de caras: $Y \sim Bi(3; 0,8)$

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?

$$P(Y = 3) = \binom{3}{3} \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^0 = 1 \cdot (0,8)^3 \cdot 1 = \frac{64}{125} = 0,512$$

La probabilidad de obtener 3 caras al repetir 3 veces el experimento es **0,512 (51,2 %)**

PROBLEMA 7

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

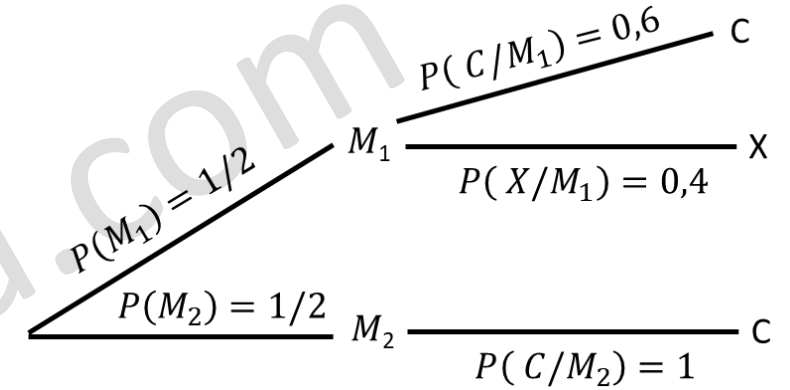
Obtener exactamente una cruz equivale a **obtener exactamente 2 caras**.

Se recuerda que Y es el número de caras: $Y \sim Bi(3; 0,8)$

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^1 = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{48}{125} = 0,384$$

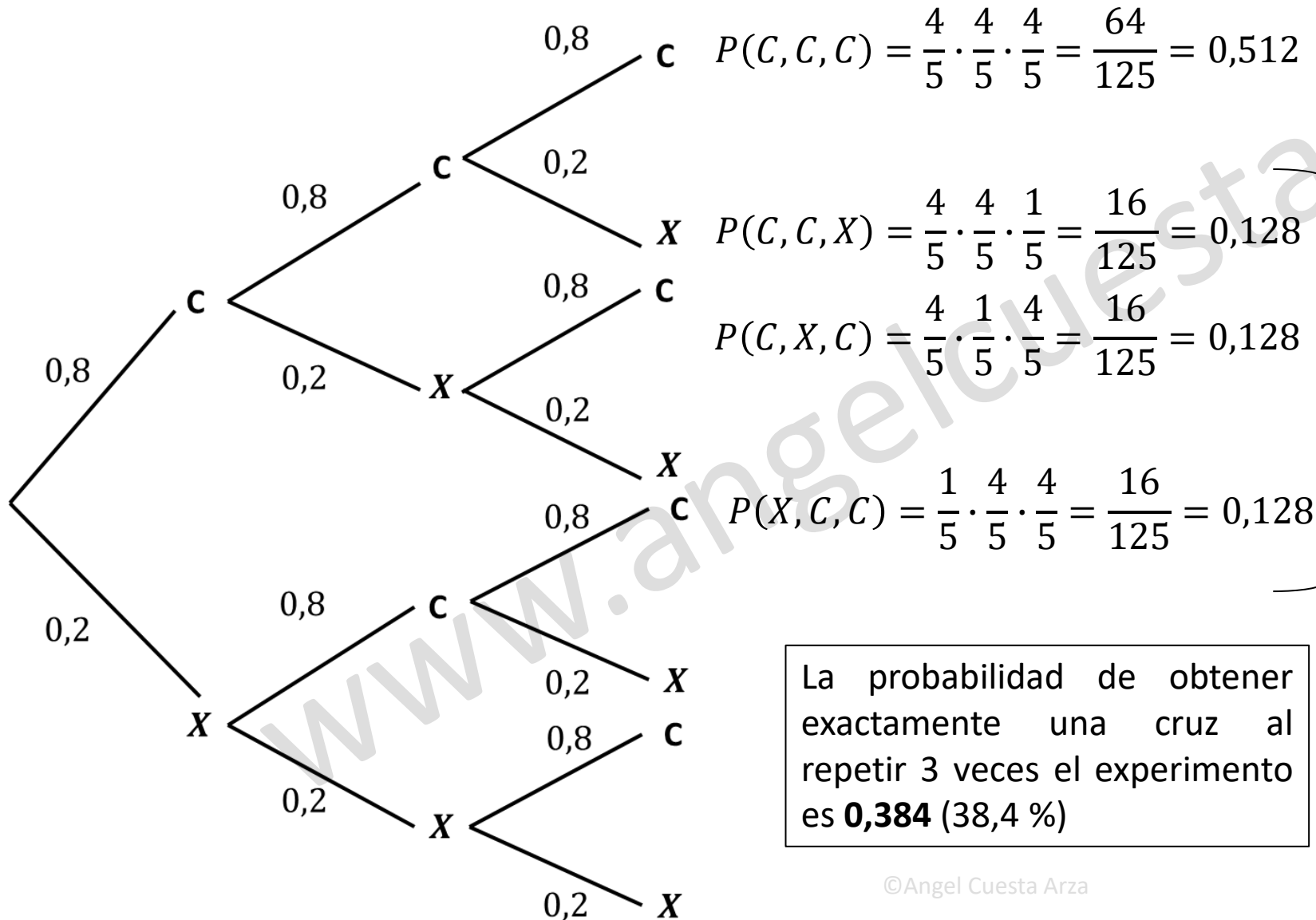
La probabilidad de obtener exactamente una cruz al repetir 3 veces el experimento es **0,384 (38,4 %)**

Comentario: Este apartado se podría haber resuelto sin utilizar la distribución binomial. Podríamos representar un nuevo diagrama de árbol en el que se representaran los 3 lanzamientos. Se ha aprovechado que se puede hacer mediante la binomial con fines pedagógicos y porque es un método más eficaz. **En la siguiente diapositiva se muestra el diagrama de árbol que habría que hacer para no utilizar la binomial y se resuelve el ejercicio.**



1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?



La probabilidad de obtener 3 caras al repetir 3 veces el experimento es **0,512** (51,2 %)

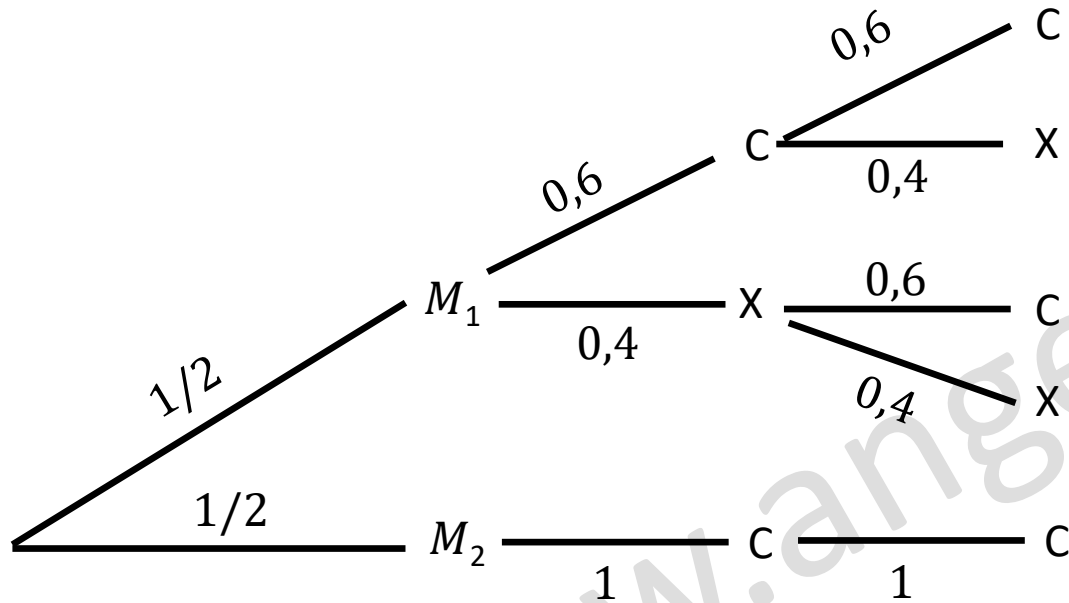
$$P(1 \text{ CRUZ}) = 3 \cdot \frac{16}{125} = \frac{48}{125} = 0,384$$

La probabilidad de obtener exactamente una cruz al repetir 3 veces el experimento es **0,384** (38,4 %)

PROBLEMA 7

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .

Se construye el nuevo diagrama de árbol.



Se definen los sucesos:

M_1 =se elige la moneda trucada con cara y cruz.

M_2 =se elige la moneda con dos caras.

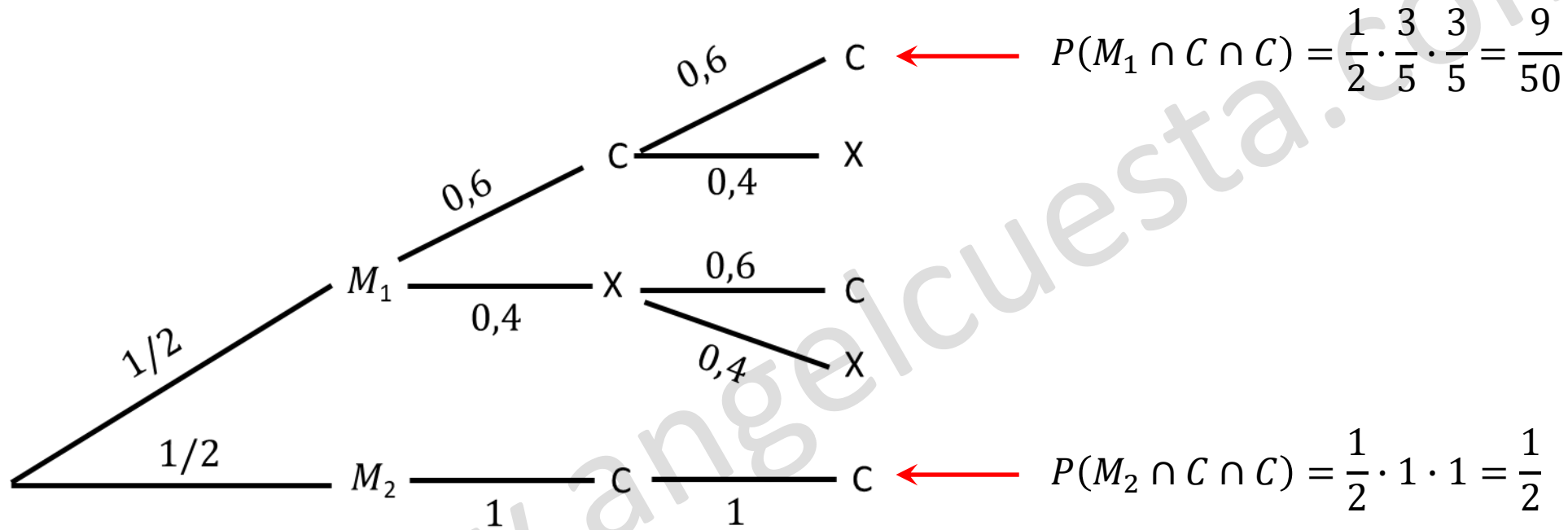
C =al lanzar la moneda, sale cara.

X =al lanzar la moneda, sale cruz.

Continúo en la siguiente diapositiva.

PROBLEMA 7

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .



Se aplica el teorema de Bayes: $P(M_1/C \cap C) = \frac{P(M_1 \cap C \cap C)}{P(M_1 \cap C \cap C) + (M_2 \cap C \cap C)}$

$$P(M_1/C \cap C) = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{9}{50} + \frac{1}{2}} = \frac{9}{34}$$

La probabilidad de que la moneda elegida sea M_1 si se han obtenido dos caras es **9/34**.

PROBLEMA 7

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .

Puesto que sólo se puede elegir la moneda M_1 y la moneda M_2 , para calcular la probabilidad de que se haya elegido la moneda M_2 podemos utilizar el concepto de suceso contrario.

$$P(M_2/C \cap C) = 1 - P(M_1/C \cap C) = 1 - \frac{9}{34} = \frac{25}{34}$$

La probabilidad de que la moneda elegida sea M_2 si se han obtenido dos caras es **25/34**.

Comentario: Esta segunda parte del ejercicio también se podría resolver aplicando el teorema de Bayes. Simplemente se repite el proceso que seguimos para la moneda M_1 .

Se aplica el teorema de Bayes:
$$P(M_2/C \cap C) = \frac{P(M_2 \cap C \cap C)}{P(M_1 \cap C \cap C) + P(M_2 \cap C \cap C)}$$

$$P(M_2/C \cap C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{50} + \frac{1}{2}} = \frac{25}{34}$$

La probabilidad de que la moneda elegida sea M_2 si se han obtenido dos caras es **25/34**.

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 8

Probabilidad-Distribución binomial

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PROBLEMA 8

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

- a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.
- b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.
- c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Solución: El experimento “venta por teléfono del comercial” sólo tiene **dos** posibles resultados (consigue venta o no consigue venta). Además, los resultados de las distintas llamadas son **independientes** entre sí. Por consiguiente, podemos decir que el número de ventas obtenidas por el comercial es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial. Siendo:

X =número de llamadas que acaban en venta.

Tomo esta variable porque en los apartados del ejercicio me piden la probabilidad de que consiga cierto número de ventas.

p =probabilidad de éxito (la llamada finalizó en venta)=**0,7**

q =probabilidad de fracaso (la llamada NO finalizó en venta)=**0,3**

n =número de llamadas que hizo el comercial.

Podemos escribir: $X \sim Bi(10; 0,7)$

PROBLEMA 8

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. $X \sim Bi(10; 0,7)$

Si tratamos de utilizar la tabla, nos encontraremos con el problema de que la probabilidad de éxito igual a **0,7** no está en la tabla que nos proporcionan en el examen. **Sólo hay valores comprendidos entre 0 y 0,5.**

Por ello, debemos hacer un cambio de variable y definir una nueva distribución binomial asociada al suceso contrario, es decir, el número de llamadas que no han acabado en venta. Siendo:

Y =número de llamadas que NO acaban en venta.

p =probabilidad de éxito (la llamada NO finalizó en venta)=**0,3**

q =probabilidad de fracaso (la llamada finalizó en venta)=**0,7**

Podemos escribir: $Y \sim Bi(10; 0,3)$

Ahora debemos reescribir la pregunta en función de Y . $X + Y = 10 \longrightarrow X = 10 - Y$

$$P(X > 7) \xrightarrow{X = 10 - Y} P(10 - Y > 7) \longrightarrow P(-Y > -3) \longrightarrow P(Y < 3) \longrightarrow P(Y \leq 2)$$

Ahora ya podemos utilizar la tabla.

PROBLEMA 8

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. $X \sim Bi(10; 0,7)$

$$P(Y \leq 2) = 0,3828$$

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{k=1}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719

La probabilidad de que consiga más de 7 ventas es **0,3828**, es decir un **38,28 %**.

Comentario: Este apartado puede hacerse sin hacer uso de la tabla y así te ahorrarías el cambio de variable. Yo lo he hecho para enseñaros a utilizar la tabla y como hacer cambios de variable en este tipo de ejercicios. Se podría hacer por medio de la fórmula de la binomial aplicada 3 veces.

$$P(X > 7) = P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,2335 + 0,1211 + 0,0282 = \mathbf{0,3828}$$

PROBLEMA 8

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.

De nuevo haremos el cambio de variable para poder utilizar la tabla $X + Y = 10 \longrightarrow X = 10 - Y$

$$P(X \geq 5) \xrightarrow{X = 10 - Y} P(10 - Y \geq 5) \longrightarrow P(-Y \geq -5) \longrightarrow P(Y \leq 5)$$

Ahora ya podemos utilizar la tabla.

Comentario: Este apartado también puede hacerse sin hacer uso de la tabla, pero de nuevo tendrás que hacer muchos cálculos.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{k=1}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281

$$P(Y \leq 5) = 0,9527$$

La probabilidad de que consiga al menos 5 ventas es **0,9527**, es decir un **95,27 %**.

PROBLEMA 8

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

De nuevo haremos el cambio de variable para poder utilizar la tabla $X + Y = 10 \longrightarrow X = 10 - Y$

$$P(3 \leq X \leq 8) \xrightarrow{X = 10 - Y} P(3 \leq 10 - Y \leq 8) \longrightarrow P(-7 \leq -Y \leq -2) \longrightarrow P(2 \leq Y \leq 7)$$

$P(2 \leq Y \leq 7) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1)$ Ahora ya podemos utilizar la tabla.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893

$$P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1) = 0,9984 - 0,1493 = 0,8491$$

©Angel Cuesta Arza

La probabilidad de que consiga entre 3 y 8 ventas es **0,8491**, es decir un **84,91 %**.

PROBLEMA 8

Comentario final: Evidentemente y tal como he comentado a lo largo del ejercicio, podemos resolver este ejercicio haciendo los cálculos sin utilizar la tabla de la binomial. Ello nos obligará a hacer muchos cálculos, pero esto no es un problema ya que disponemos de modernas calculadoras que los hacen de forma rápida y sencilla.

De todas formas, a aquellos que vayáis a estudiar en la universidad un grado que tenga la asignatura de estadística, os aconsejo que aprendáis a utilizar la tabla de la binomial ya que en la universidad será necesario su manejo. No digáis que no lo he advertido.