

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 1

Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



Problema 1

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

Solución: Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de m utilizando su determinante. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 6$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado. $-m^2 + m + 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$

Si $m \neq -2$ y $m \neq 3$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $m = -2$ o $m = 3$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de m en las matrices.

Problema 1

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de m . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Si $m = -2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}]{\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{¡ OJO !}}]{F_3=F_3+4F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$

A A

F_2	2	-2	-1	-6
$2F_1$	-2	2	2	-4
$F_2=F_2+2F_1$	0	0	1	-10

F_3	0	0	-4	10
$4F_2$	0	0	4	-40
$F_3=F_3+4F_2$	0	0	0	-30

F_3	-3	3	-1	4
$-3F_1$	3	-3	-3	6
$F_3=F_3-3F_1$	0	0	-4	10

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $m = -2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$.**

Problema 1

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Si $m = 3 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+2F_1}]{\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	2	3	-1	9
$2F_1$	-2	2	2	6
$F_2=F_2+2F_1$	0	5	1	15

F_3	0	5	1	15
$-F_2$	0	5	1	15
$F_3=F_3-F_2$	0	0	0	0

F_3	2	3	-1	9
$2F_1$	-2	2	2	6
$F_3=F_3+2F_1$	0	5	1	15

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las dos filas linealmente independientes. Para $m = 3$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Problema 1

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $m \neq -2$ y $m \neq 3$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $m = 3$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $m = -2$	2	3	3	S.I.	Sin solución

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Para resolver el sistema de ecuaciones aprovecharemos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior para $m=3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 5y + z = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 3 \\ y = \lambda; z = 15 - 5\lambda \end{cases} \rightarrow -x + \lambda + 15 - 5\lambda = 3 \rightarrow x = -4\lambda + 12$$

La solución del sistema para $m = 3$ es:

$$\begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$