

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



Cálculo de la matriz inversa



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

- a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .
- b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$.
- c) Para $m = 0$, calcular A^5 .

Solución: Calculo el rango de A en función de m utilizando su determinante. En este caso, es fácil obtener el determinante desarrollando por la fila 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m \cdot (m - m^2) = m^2 \cdot (1 - m) \quad \text{Se iguala a cero y se resuelve la ecuación.}$$

$$m^2 \cdot (1 - m) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran**(A) = 3

Si $m = 0$ o $m = 1$ entonces $|A| = 0$, **Ran**(A) < 3 $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A sustituyendo los valores de m en la matriz.

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .

Sustituyo por $m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Busco un menor que sea distinto de cero. En este caso es α_{23} $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \longrightarrow$ Si $m = 0$, **Ran(A) = 2**

Sustituyo por $m = 1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Busco un menor que sea distinto de cero. En este caso es α_{33} $\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \longrightarrow$ Si $m = 1$, **Ran(A) = 2**

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3**

Si $m = 0$, **Ran(A) = 2**

Si $m = 1$, **Ran(A) = 2**

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. Sustituyo por $m = -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se despeja la ecuación matricial. $A \cdot X = B \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Se calcula la matriz inversa de A mediante el método de los adjuntos.

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. Se continúa con el cálculo de la matriz inversa.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener:

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. Sustituyo por $m = -1 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener: c) Para $m = 0$, calcular A^5 .

Al sustituir la matriz quedará: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculo en primer lugar las potencias cuadrada y cúbica. A partir de esos datos, calcularé A^5 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$