

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 3
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



PROBLEMA 3

Se considera la recta: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide

a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r .

Solución: El vector director de la recta r es: $\vec{v} = (2, 3, -1)$

El vector normal del plano π es: $\vec{n} = (3, -m, 1)$

La recta y el plano serán paralelos o, bien, la recta estará contenida en el plano si $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares.

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-m) + (-1) \cdot 1 = 5 - 3m = 0$$

$m = \frac{5}{3}$ Para este valor de m la recta y el plano serán paralelos o la recta estará contenida en el plano.

Para ver cuál de las dos posibilidades es la que se verifica para dicho valor de m , se toma un punto de la recta r y se comprueba si pertenece al plano o no. El punto será $P = (1, -1, -2)$.

$$m = \frac{5}{3} \longrightarrow 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \xrightarrow{P = (1, -1, -2)} 3 \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot (-1) - 2 = 1 \longrightarrow \frac{8}{3} \neq 1$$

Para $m = 5/3$ la recta y el plano son paralelos. La recta **no está contenida en el plano para ningún valor de m .**

PROBLEMA 3

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r .

OJO: A pesar de que dice "los valores", hay un solo valor: $m = \frac{5}{3}$

La ecuación del plano se obtuvo anteriormente. $3x - \frac{5}{3}y + z = 1$

Un plano paralelo tendrá el mismo vector normal $\vec{n} = \left(3, -\frac{5}{3}, 1\right)$ y su ecuación será: $3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0$

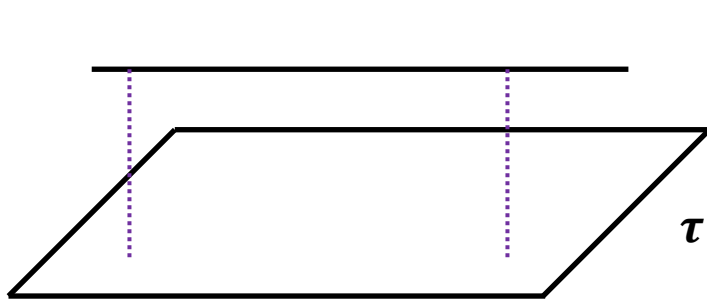
Para que contenga a la recta r , debe pasar por un punto de ella: $P = (1, -1, -2)$.

$$3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0 \xrightarrow{P = (1, -1, -2)} 3 \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot (-1) - 2 + D = 0 \longrightarrow \frac{8}{3} + D = 0 \longrightarrow D = -\frac{8}{3}$$

La ecuación del plano paralelo a π que contiene a r es: $\sigma: 3x - \frac{5}{3}y + z - \frac{8}{3} = 0$

PROBLEMA 3

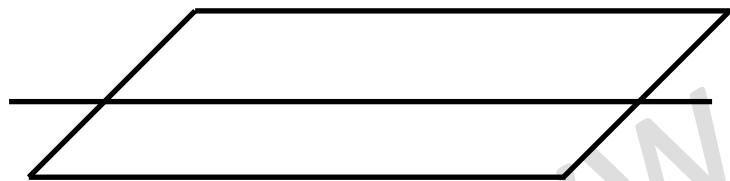
Para aclarar los dos apartados anteriores, se muestran unos esquemas de lo que acabamos de calcular.



Paralelos

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

$$\tau: 3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0; D \neq -\frac{8}{3}$$



Recta incluida en el plano

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

$$\sigma: 3x - \frac{5}{3}y + z - \frac{8}{3} = 0$$

PROBLEMA 3

c) Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$.

Se puede calcular la distancia de P al plano π : $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Siendo la ecuación del plano π : $\pi: 3x - my + z = 1 \longrightarrow \pi: 3x - my + z - 1 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - m \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}} \text{ unidades de longitud}$$

La distancia es: $\frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$ unidades de longitud.