

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 4
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



PROBLEMA 4

Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

- a) Calcular la ecuación de la recta r .
- b) Calcular la ecuación del plano que contiene al rectángulo.
- c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

Solución: Calculo el vector que va desde de P hasta Q. Este vector es el mismo que el vector director de la recta pedida ya que ambas rectas son paralelas.

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,3,1) - (2,1,3) = (-1,2,-2)$$

Escribo las ecuaciones paramétricas sabiendo que la recta pasa por R: $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

La ecuación de la recta pedida es:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 4

Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

El plano que contiene al rectángulo es aquel que pasa por los puntos P y Q y R .

Calculo primero los dos vectores directores del plano $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:

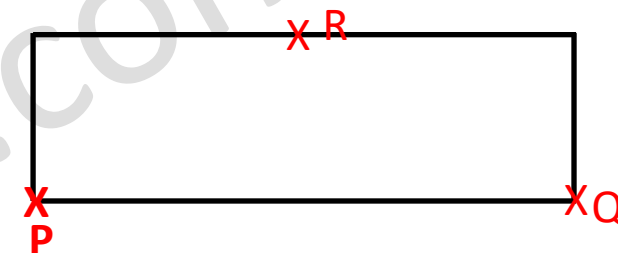
$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,3,1) - (2,1,3) = (-1,2,-2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = R - P = (4,7,6) - (2,1,3) = (2,6,3)$$

Calculo la ecuación general del plano mediante determinantes.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 18x - y - 10z - 5 = 0$$

La ecuación del plano que contiene al rectángulo es: $\pi: 18x - y - 10z - 5 = 0$



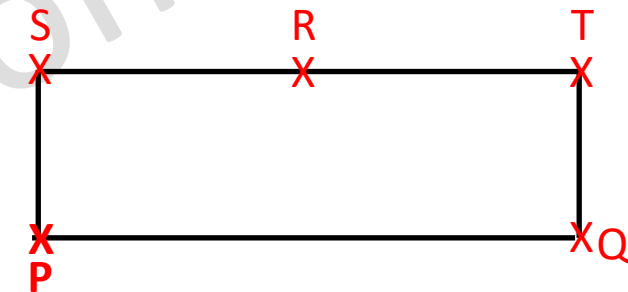
PROBLEMA 4

Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

Se calcula en primer lugar la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r . De esta forma se obtiene el punto S .

Se calcula un plano auxiliar que contenga al punto P y que sea perpendicular a la recta r . El vector normal de dicho plano es igual que el director de r .



$$\vec{v} = \vec{n} = (-1, 2, -2) \quad P = (2, 1, 3)$$

Se calcula la ecuación del plano mediante la fórmula: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$-1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) - 2 \cdot (z - 3) = 0 \longrightarrow -x + 2 + 2y - 2 - 2z + 6 = 0 \longrightarrow -x + 2y - 2z + 6 = 0$$

Se calcula la intersección del plano auxiliar con la recta r . $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

$$-(4 - \lambda) + 2 \cdot (7 + 2\lambda) - 2 \cdot (6 - 2\lambda) + 6 = 0 \longrightarrow 4 + 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{4}{9}$$

PROBLEMA 4

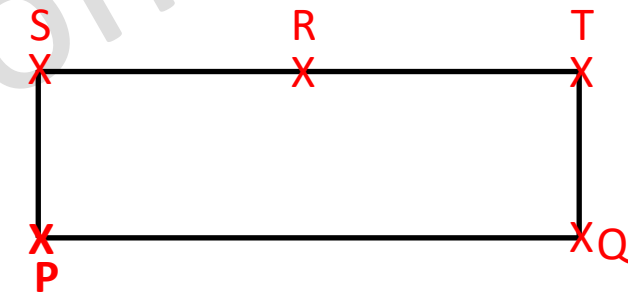
Un rectángulo (en el enunciado original ponía cuadrado, era un error) tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

Se sustituye el valor de λ en la ecuación de la recta r .

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda = -\frac{4}{9}} S: \begin{cases} x = \frac{40}{9} \\ y = \frac{55}{9} \\ z = \frac{62}{9} \end{cases}$$

Uno de los puntos del rectángulo es: $S = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$



Se hace el mismo procedimiento para calcular las coordenadas del punto T .

PROBLEMA 4

Se calcula un plano auxiliar que contenga al punto Q y que sea perpendicular a la recta r . El vector normal de dicho plano es igual que el director de r .

$$\vec{v} = \vec{n} = (-1, 2, -2) \quad Q = (1, 3, 1)$$

Se calcula la ecuación del plano mediante la fórmula: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 3) - 2 \cdot (z - 1) = 0 \longrightarrow -x + 1 + 2y - 6 - 2z + 2 = 0 \longrightarrow -x + 2y - 2z - 3 = 0$$

Se calcula la intersección del plano auxiliar con la recta r . $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

$$-(4 - \lambda) + 2 \cdot (7 + 2\lambda) - 2 \cdot (6 - 2\lambda) - 3 = 0 \longrightarrow -5 + 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{5}{9}$$

Se sustituye el valor de λ en la ecuación de la recta r . $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda = \frac{5}{9}} T: \begin{cases} x = \frac{31}{9} \\ y = \frac{73}{9} \\ z = \frac{44}{9} \end{cases}$

Los dos vértices del rectángulo son: $S = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ $T = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$