

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 5
Análisis de funciones

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

Solución: Se hace el ejercicio para $k \neq 0$. Si $k = 0$, $f(x) = 0$ y no tendría sentido el ejercicio.

Se igual el denominador a cero para comprobar si hay valores de x que estén fuera del dominio.

$e^{2x} = 0 \longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \text{ que verifique la ecuación.}$

$$\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}}$$

La función no tiene asíntotas verticales, ya que está definida en todos los números reales.

Se calcula si $f(x)$ tiene asíntota horizontal calculando los límites cuando x tiende a más y menos infinito.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = 0$ Ya que el orden del infinito del denominador es mayor que el del numerador. También podría utilizarse la regla de L'Hôpital.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}}$ Calculo el valor del límite y luego lo multiplicaré por k .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$ El valor del límite dependerá del signo de k .

Continúo el razonamiento en la siguiente diapositiva.

Problema 5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$$\text{Si } k > 0: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = k \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{Si } k < 0: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x}} = k \cdot (-\infty) = +\infty$$

$\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$; $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

Puesto que $f(x)$ tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$, **no tendrá asíntota oblicua** en ese caso.

$f(x)$ **no tiene asíntota horizontal** cuando x tiende a $-\infty \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Puesto que $f(x)$ **NO tiene asíntota horizontal** cuando x tiende a $-\infty$, debo comprobar si tiene asíntota oblicua en ese caso.

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) **Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.** Se comprueba si la función tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

La ecuación de la posible asíntota oblicua sería: $y = m \cdot x + n$

Se calcula la pendiente de la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{x \cdot e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}$$

$$\text{Si } k > 0: \quad m = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = k \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{Si } k < 0: \quad m = k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = k \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

$f(x)$ NO tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty \forall k \in \mathfrak{M} - \{0\}$

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Se calcula la función derivada y se iguala a cero. A continuación, se hace un estudio de signos de la derivada.

$$f'(x) = \frac{k \cdot e^{2x} - kx \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \cdot (k - 2kx)}{(e^{2x})^2} = \frac{k \cdot (1 - 2x)}{e^{2x}}$$

$$\frac{k \cdot (1 - 2x)}{e^{2x}} = 0 \longrightarrow k \cdot (1 - 2x) = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{Recuerda que } k \neq 0$$

Debemos analizar la monotonía para los casos: $k > 0$ y $k < 0$, ya que el signo de la derivada depende del signo de k .

Problema 5

$$f'(x) = \frac{k \cdot (1 - 2x)}{e^{2x}}$$

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Si $k > 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

$$f'(0) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 0)}{e^{2 \cdot 0}} = k > 0; \text{Creciente}$$

$$f'(1) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 1)}{e^{2 \cdot 1}} = -k < 0; \text{Decreciente}$$

Si $k < 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

$$f'(0) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 0)}{e^{2 \cdot 0}} = k < 0; \text{Decreciente}$$

$$f'(1) = \frac{k \cdot (1 - 2 \cdot 1)}{e^{2 \cdot 1}} = -k > 0; \text{Creciente}$$

Si $k > 0$, $f(x)$ es creciente si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y es decreciente si $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Si $k < 0$, $f(x)$ es decreciente si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y es creciente si $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Si $k > 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k \cdot \frac{1}{2}}{e^{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

Si $k > 0$, $f(x)$ tiene un máximo relativo: $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$

Si $k < 0$

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k \cdot \frac{1}{2}}{e^{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

Si $k < 0$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo: $m = \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$

Problema 5

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $(-1,1)$

Utilizaremos el teorema de Bolzano para demostrar dicho resultado. El teorema de Bolzano establece que si una función continua en un intervalo $[a, b]$, denotada como $f(x)$, toma valores con signos opuestos en dos puntos a y b (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto c en el intervalo (a, b) donde $f(c) = 0$.

En primer lugar, podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y por lo tanto también lo es en el intervalo $[-1,1]$.

$$\text{Por otro lado: } f(-1) = \frac{-k}{e^{-2}} = -k \cdot e^2 \quad f(1) = \frac{k}{e^2} = k \cdot e^{-2}$$

Verifico la segunda condición: $f(-1) \cdot f(1) < 0$

$$f(-1) \cdot f(1) = -k \cdot e^2 \cdot k \cdot e^{-2} = -k^2 < 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto, **existe un valor c que pertenece al intervalo $(-1, 1)$, tal que $f(c) = 0$** , y, por consiguiente, garantizamos que la función se anula para al menos un valor de dicho intervalo.