

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 6
Integrales



Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



PROBLEMA 6

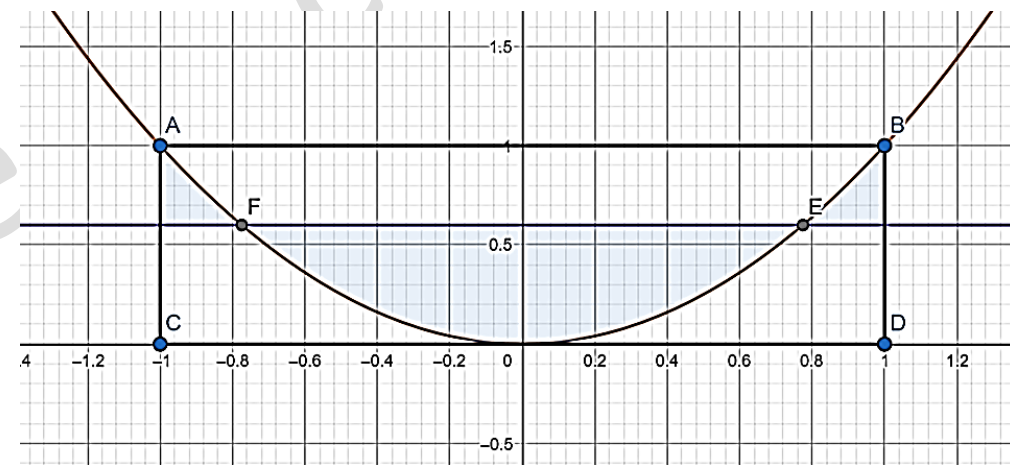
Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R .

Solución: Se hace un esquema con los datos del problema.

El área coloreada es igual a un tercio del área total del rectángulo.

El área del rectángulo es: $A_{rect} = 2 \cdot 1 = 2 u^2$

El área coloreada está repartida en 3 zonas. Al ser las funciones $f(x)$ y $g(x)$ pares, podemos calcular el área entre el origen y E y después el área entre E y B . Después bastará multiplicar por dos para obtener el área total.



Se calculan los puntos de corte entre ambas funciones, para ello se igualan. $x^2 = a \longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Los dos puntos de corte de las gráficas son: $F = (-\sqrt{a}, a)$ y $E = (\sqrt{a}, a)$

Utilizo estos valores para calcular el valor del área coloreada.

PROBLEMA 6

Tal como he dicho antes voy a calcular sólo el área coloreada para valores de x mayores que cero.

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}}$$

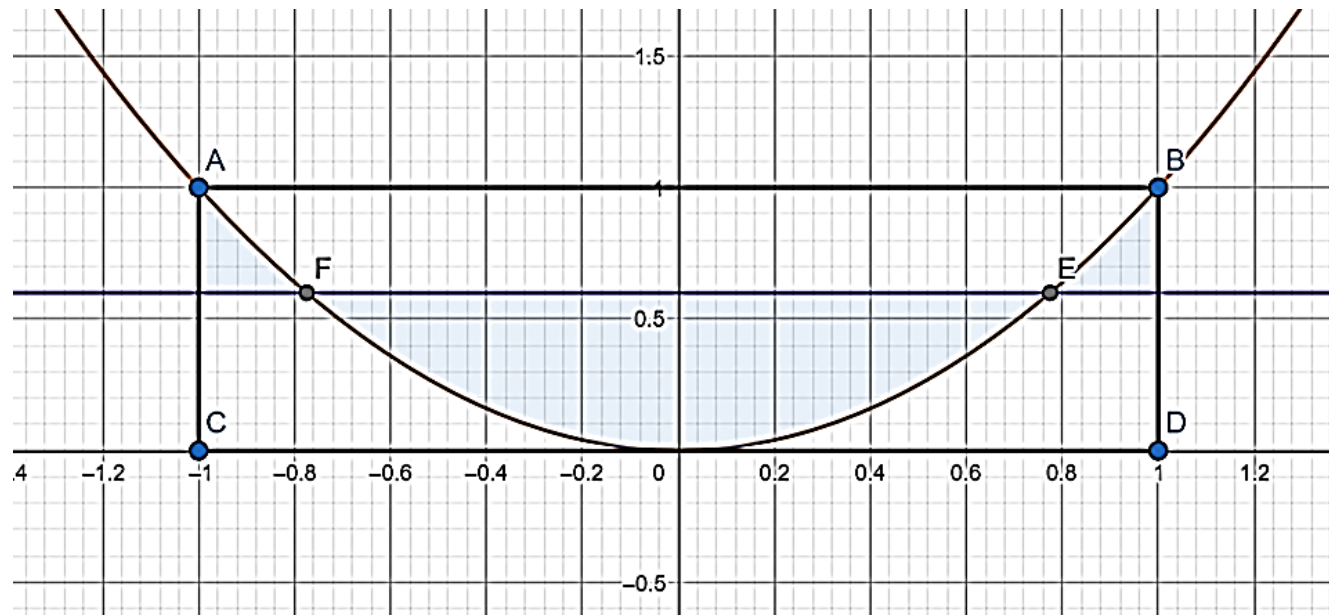
$$A_1 = \left(a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) - 0 = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{\sqrt{a}}^1 = \left(\frac{1}{3} - a \right) - \left(\frac{(\sqrt{a})^3}{3} - a\sqrt{a} \right) = \frac{1}{3} - a - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

Para calcular el área total entre la curva y el rectángulo debo multiplicar por 2 la suma de las áreas.

$$A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot \left(\frac{2a\sqrt{a}}{3} + \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{4a\sqrt{a} + 1}{3} - a \right)$$

Se iguala el valor del área total y se iguala a $2/3$, que es la tercera parte del área del rectángulo.



PROBLEMA 6

Se iguala el valor del área total y se iguala a $2/3$, que es la tercera parte del área del rectángulo.

$$2 \cdot \left(\frac{4a\sqrt{a} + 1}{3} - a \right) = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{4a\sqrt{a} + 1}{3} - a = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4a\sqrt{a} + 1 - 3a}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4a\sqrt{a} + 1 - 3a}{3} = \frac{1}{3}$$

$$4a\sqrt{a} + 1 - 3a = 1 \longrightarrow 4a\sqrt{a} - 3a = 0 \longrightarrow a \cdot (4\sqrt{a} - 3) = 0 \xrightarrow{0 < a < 1} 4\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$4\sqrt{a} = 3 \longrightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{4} \longrightarrow a = \frac{9}{16}$$

El valor de a es **9/16**.