

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Junio 2024



Problema 7

Probabilidad-Distribución binomial

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

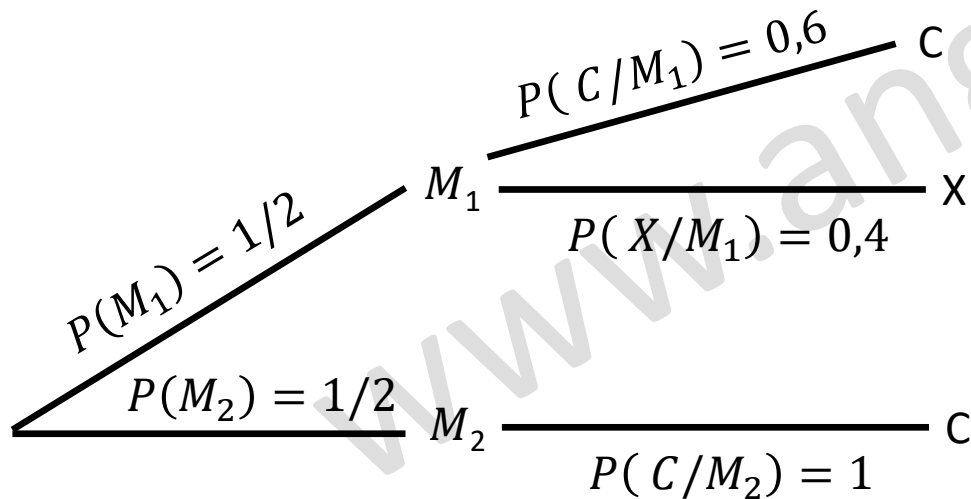
PROBLEMA 7

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0,6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

Solución: Se construye el diagrama de árbol.



Se definen los sucesos:

M_1 =se elige la moneda trucada con cara y cruz.

M_2 =se elige la moneda con dos caras.

C=al lanzar la moneda, sale cara.

X=al lanzar la moneda, sale cruz.

Continúo en la siguiente diapositiva.

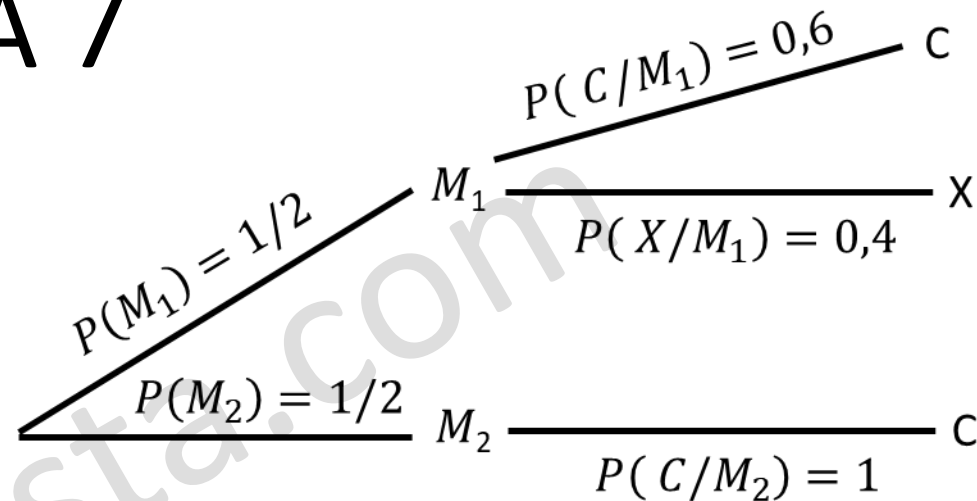
PROBLEMA 7

Se calcula la probabilidad de que salga cara en la primera elección.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(M_1) \cdot P(C/M_1) + P(M_2) \cdot P(C/M_2)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,8$$



Se repite 3 veces el experimento. Como los sucesivos experimentos son independientes entre sí y dicho experimento sólo tiene dos posibles resultados (salir cara o salir cruz), podemos decir que el número de caras sigue una distribución binomial.

Siendo Y el número de caras: $Y \sim Bi(3; 0,8)$

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?

$$P(Y = 3) = \binom{3}{3} \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^0 = 1 \cdot (0,8)^3 \cdot 1 = \frac{64}{125} = 0,512$$

La probabilidad de obtener 3 caras al repetir 3 veces el experimento es **0,512** (51,2 %)

PROBLEMA 7

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

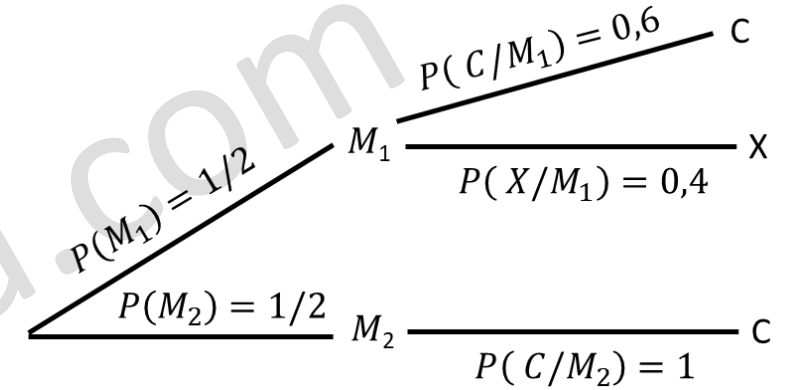
Obtener exactamente una cruz equivale a **obtener exactamente 2 caras**.

Se recuerda que Y es el número de caras: $Y \sim Bi(3; 0,8)$

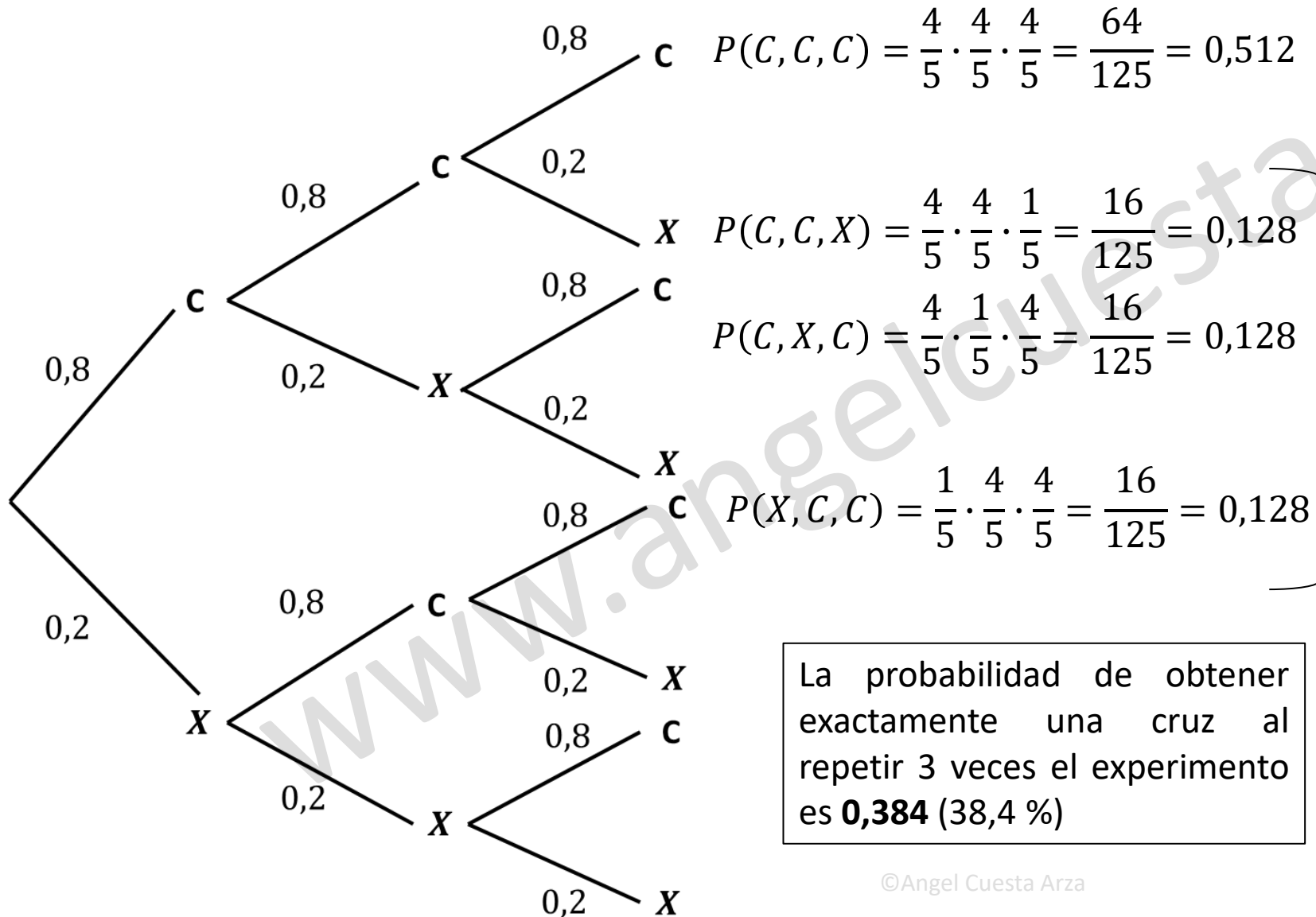
$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^1 = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{48}{125} = 0,384$$

La probabilidad de obtener exactamente una cruz al repetir 3 veces el experimento es **0,384** (38,4 %)

Comentario: Este apartado se podría haber resuelto sin utilizar la distribución binomial. Podríamos representar un nuevo diagrama de árbol en el que se representaran los 3 lanzamientos. Se ha aprovechado que se puede hacer mediante la binomial con fines pedagógicos y porque es un método más eficaz. **En la siguiente diapositiva se muestra el diagrama de árbol que habría que hacer para no utilizar la binomial y se resuelve el ejercicio.**



1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?



La probabilidad de obtener 3 caras al repetir 3 veces el experimento es **0,512** (51,2 %)

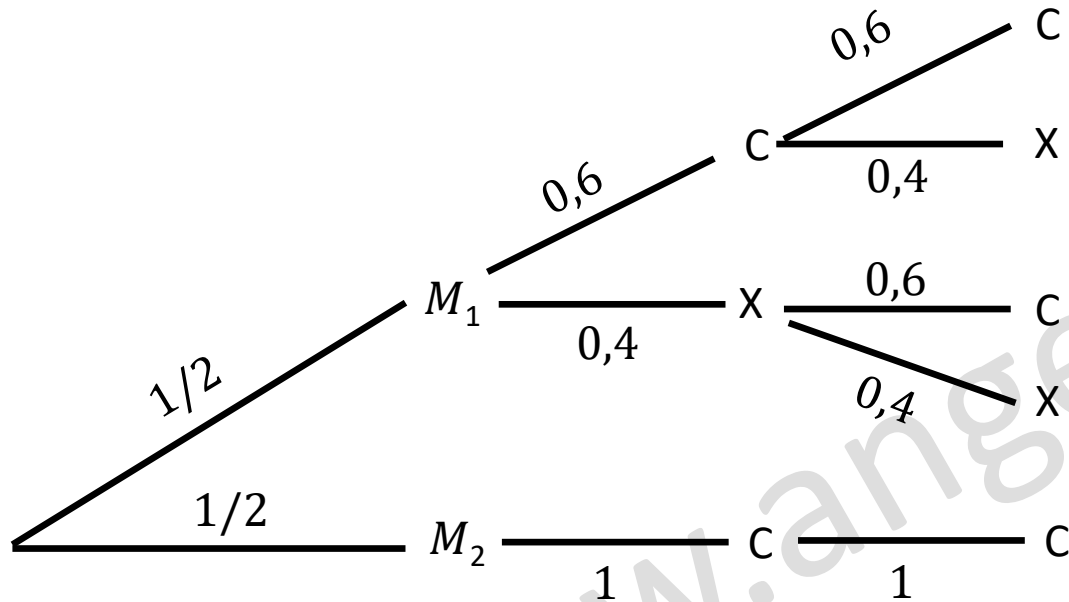
$$-P(1 \text{ CRUZ}) = 3 \cdot \frac{16}{125} = \frac{48}{125} = 0,384$$

La probabilidad de obtener exactamente una cruz al repetir 3 veces el experimento es **0,384** (38,4 %)

PROBLEMA 7

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .

Se construye el nuevo diagrama de árbol.



Se definen los sucesos:

M_1 =se elige la moneda trucada con cara y cruz.

M_2 =se elige la moneda con dos caras.

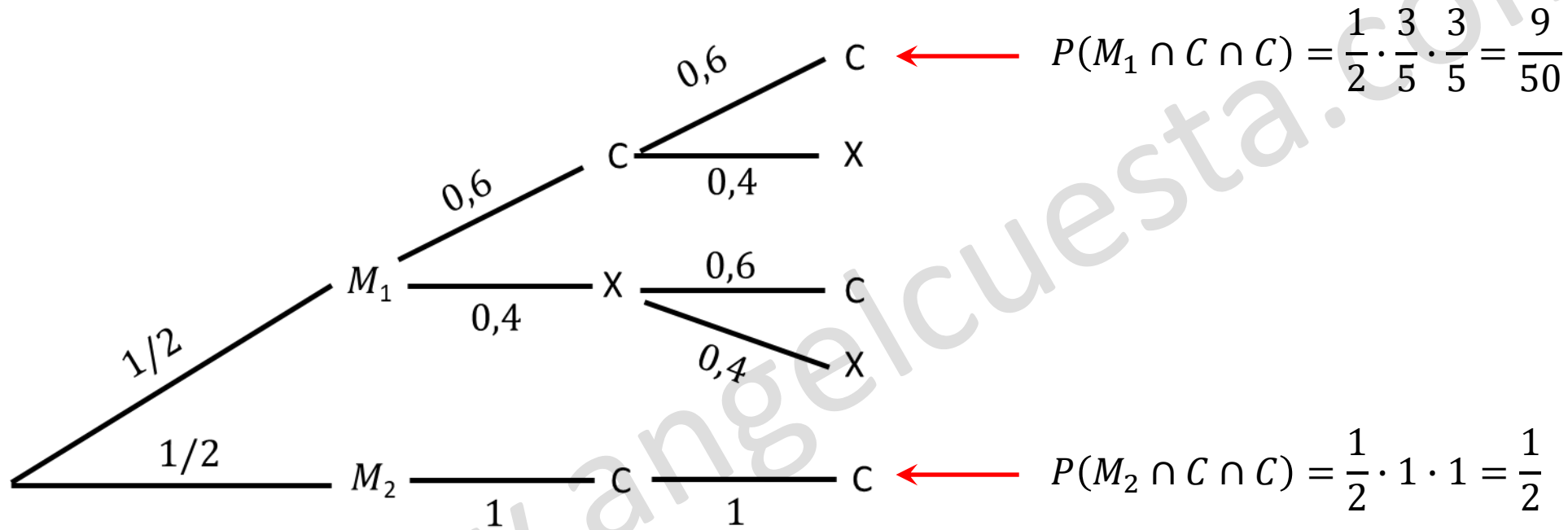
C=al lanzar la moneda, sale cara.

X=al lanzar la moneda, sale cruz.

Continúo en la siguiente diapositiva.

PROBLEMA 7

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .



Se aplica el teorema de Bayes: $P(M_1/C \cap C) = \frac{P(M_1 \cap C \cap C)}{P(M_1 \cap C \cap C) + (M_2 \cap C \cap C)}$

$$P(M_1/C \cap C) = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{9}{50} + \frac{1}{2}} = \frac{9}{34}$$

La probabilidad de que la moneda elegida sea M_1 si se han obtenido dos caras es **9/34**.

PROBLEMA 7

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .

Puesto que sólo se puede elegir la moneda M_1 y la moneda M_2 , para calcular la probabilidad de que se haya elegido la moneda M_2 podemos utilizar el concepto de suceso contrario.

$$P(M_2/C \cap C) = 1 - P(M_1/C \cap C) = 1 - \frac{9}{34} = \frac{25}{34}$$

La probabilidad de que la moneda elegida sea M_2 si se han obtenido dos caras es **25/34**.

Comentario: Esta segunda parte del ejercicio también se podría resolver aplicando el teorema de Bayes. Simplemente se repite el proceso que seguimos para la moneda M_1 .

Se aplica el teorema de Bayes:
$$P(M_2/C \cap C) = \frac{P(M_2 \cap C \cap C)}{P(M_1 \cap C \cap C) + P(M_2 \cap C \cap C)}$$

$$P(M_2/C \cap C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{50} + \frac{1}{2}} = \frac{25}{34}$$

La probabilidad de que la moneda elegida sea M_2 si se han obtenido dos caras es **25/34**.