



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Probabilidad

Junio 2025 · Problema 1

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

Se definen los sucesos dados en el enunciado.

$$M = \{Pizza\ margarita\} \quad V = \{Pizza\ vegetariana\} \quad P = \{Pizza\ pepperoni\}$$

Tomamos datos del enunciado. $P(M) = 0,40$ $P(V) = 0,25$

Partimos de la hipótesis de que los tres tipos de pizza agotan el espacio muestral y son mutuamente excluyentes.

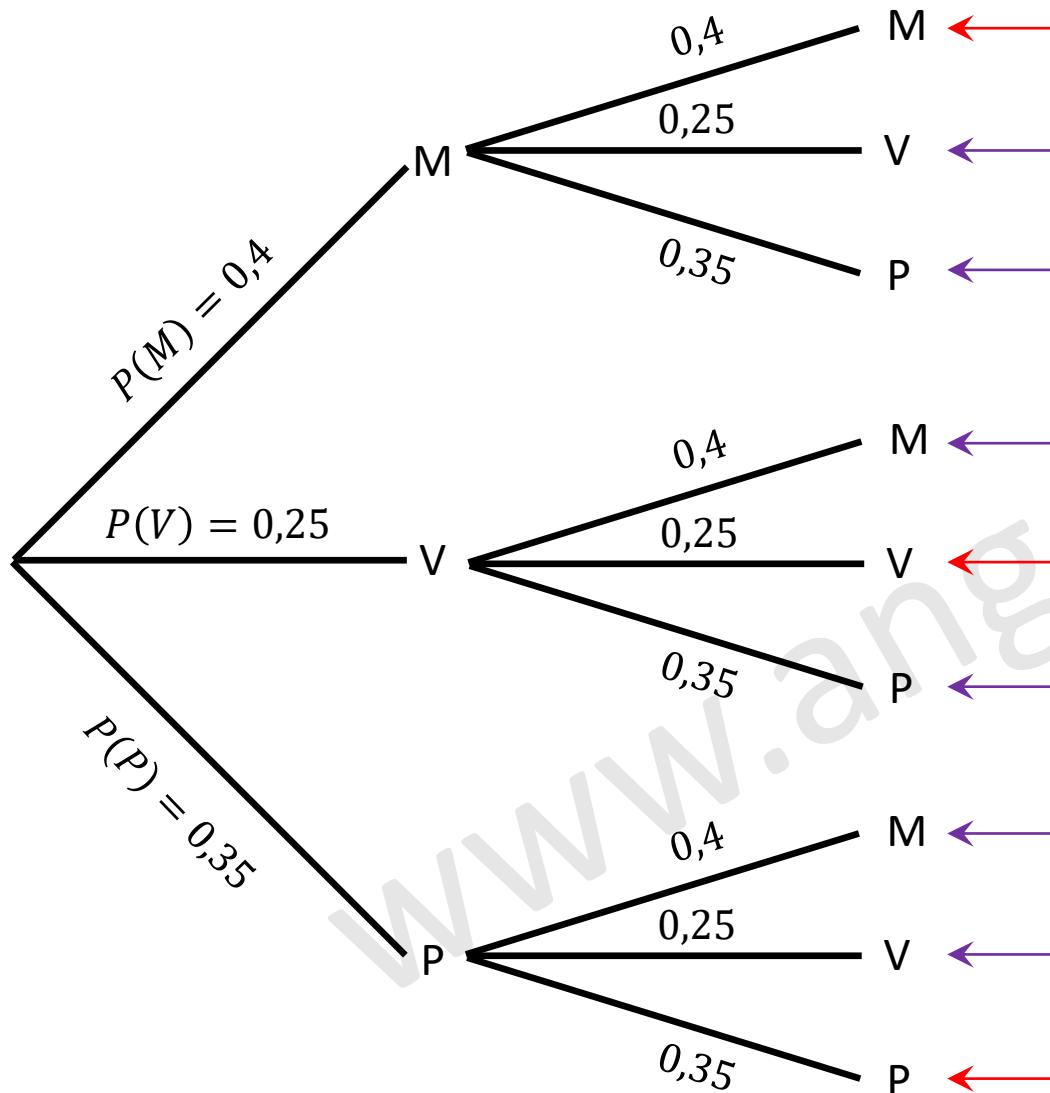
Por este motivo podemos afirmar que la suma de las probabilidades de los 3 sucesos es igual a 1.

$$P(M) + P(V) + P(P) = 1 \longrightarrow P(P) = 1 - P(M) - P(V) = 1 - 0,40 - 0,25 = 0,35$$

La probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni es **0,35 (35%)**.

1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Se construye el diagrama de árbol. Suponemos que los pedidos de los clientes son independientes entre si.



Podemos calcular la probabilidad pedida a partir de la probabilidad del suceso contrario. El suceso contrario al pedido es que las pizzas sean del mismo tipo.

$$P(\text{Distinto sabor}) = 1 - P(\text{Mismo sabor})$$

$$P(\text{Distinto sabor}) = 1 - (P(M \cap M) + P(V \cap V) + P(P \cap P))$$

$$P(\text{Distinto sabor}) = 1 - (0,4 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,25 + 0,35 \cdot 0,35)$$

$$P(\text{Distinto sabor}) = 0,655$$

La probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza es **0,655 (65,5%)**.

PREGUNTA 1

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

Suponemos que los pedidos de los clientes son independientes entre si.

Definimos la variable aleatoria X: **X**=número de clientes que piden pizza margarita,

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 10; p = 0,4; q = 0,6$ **$X \sim Bi(10; 0,4)$**

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = 210 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = 0,2508$

También puedes hacerlo utilizando la tabla que proporcionan en el examen.

$$P(X = 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) = 0,6331 - 0,3823 = 0,2508$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770

La probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita es **0,2508 (25,08%)**.

PREGUNTA 1

1.4 ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

Se calcula la probabilidad pedida.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{10} = 0,9939$$

La probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita es **0,9939 (99,39%)**.



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Álgebra matricial

Junio 2025 · Problema 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.1

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

2.1.1 En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Se calcula en primer lugar la matriz A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot (1 - \alpha) \\ 0 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot (1 - \alpha) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot 0 & 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (1 - \alpha) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.1

2.1.1 En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Se recuerda que: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos y cada uno de sus elementos a_{ij} . Se igualan ambas matrices y sus elementos a_{ij} .

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 = 1 & \alpha = \alpha + \alpha^2 & 0 = 0 \\ 0 = 0 & \alpha = \alpha^2 & 0 = 0 \\ 0 = 0 & 0 = 0 & 1 - \alpha = (1 - \alpha)^2 \end{matrix}$$

Se obtiene el valor del parámetro que satisface todas y cada una de las igualdades.

$$\alpha = \alpha + \alpha^2 \rightarrow \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha^2 \rightarrow \alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha \cdot (\alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

$$1 - \alpha = (1 - \alpha)^2 \rightarrow (1 - \alpha)^2 - (1 - \alpha) = 0 \rightarrow (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1 \\ 1 - \alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Hay un único valor para el que la matriz es idempotente. $\alpha = 0$.

Ejercicio 2.1

2.1.2 En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos y en el proceso se calculará el valor de α para el cual la matriz tiene inversa. El valor del determinante se obtiene desarrollando por adjuntos.

$$1) \text{ Calculo } |A|; \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \alpha$$

Para que exista la matriz inversa de A , su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$(1 - \alpha) \cdot \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\exists A^{-1} \forall \alpha \in \mathfrak{R} - \{0, 1\}$.

Ejercicio 2.1

2.1.2 En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Se calcula ahora la matriz inversa. Recordamos que: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \alpha$

1) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (1 - \alpha) & 0 & 0 \\ -\alpha \cdot (1 - \alpha) & (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

2) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (1 - \alpha) & -\alpha \cdot (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

3) Aplico la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t = \frac{1}{(1 - \alpha) \cdot \alpha} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot (1 - \alpha) & -\alpha \cdot (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 - \alpha \end{pmatrix}$$



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Junio 2025 • Problema 2.2

Ejercicio 2.2

Sea el sistema de ecuaciones donde a es un parámetro real. Se pide:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.2.1 Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado.

2.2.3 Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9a + 27$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $9a + 27 = 0 \longrightarrow a = -3$

Si $a \neq -3$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3$ $\xrightarrow[3 \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3}$ $\text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -3$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

Ejercicio 2.2

2.2.1 Discutir el sistema en función del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Si $a = -3 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}]{\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 5 & 9 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$3F_2$	6	-9	-15	-9
$-2F_1$	-6	4	6	0
$F_2=3F_2-2F_1$	0	-5	-9	-9

F_3	0	5	9	9
F_2	0	-5	-9	-9
$F_3=F_3+F_2$	0	0	0	0

$3F_3$	3	3	6	9
$-F_1$	-3	2	3	0
$F_3=3F_3-F_1$	0	5	9	9

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene dos filas linealmente independientes. Para $a = -3$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Ejercicio 2.2

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a). Se aplica el teorema de Rouché para definir el tipo de sistema.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -3$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -3$	2	2	3	S.C.I.	Infinito

Ejercicio 2.2

2.2.2 Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado.

Para resolver el sistema de ecuaciones para $a = -3$ utilizaremos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior.

Asigno un parámetro a una de las incógnitas. En este caso $z = \lambda$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -5y - 9z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3\lambda = 0 \\ -5y - 9\lambda = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3\lambda \\ -5y = 9\lambda - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3\lambda \\ -5y = 9\lambda - 9 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &3x = 2y + 3\lambda \rightarrow 3x = 2 \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda\right) + 3\lambda \rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda\right) + \lambda \\ &y = \frac{-9\lambda + 9}{5} = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda \end{aligned} \rightarrow x = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\lambda + \lambda = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda$$

La solución del sistema si $a = -3$ es:

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.2.3 Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $a = -3$. Resolveré el sistema para $a = 0$, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 9a + 27 \xrightarrow{a=0} |A| = 27$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{0}{27} = 0 \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

La solución del sistema si $a = 0$ es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Junio 2025 • Problema 3.1

Ejercicio 3.1

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 **(1 punto)** Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 **(1 punto)** La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 **(0.5 puntos)** La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

Se calcula un punto y un vector director de las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (1,0,2) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 - 2y \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} Q = (-1,0,1) \\ \vec{w} = (0,1,-2) \end{cases}$$

Ejercicio 3.1

3.1.1 Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

$$r: \begin{cases} P = (1,0,2) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q = (-1,0,1) \\ \vec{w} = (0,1,-2) \end{cases}$$

Compruebo si las rectas son paralelas o no.

Es fácil comprobar que los vectores $\vec{v} = (2,1,-1)$ y $\vec{w} = (0,1,-2)$ no son paralelos. $\frac{0}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-1}$

Se comprueba ahora si las rectas se cortan. Serán secantes si los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. Si son independientes, las rectas se cruzan.

$$\begin{vmatrix} -1-1 & 0-0 & 1-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 0 - (0 + 0 + 2) = 0 \quad \text{Las rectas son secantes.}$$

En la siguiente diapositiva se calculan las coordenadas del punto de corte entre ambas rectas.

Ejercicio 3.1

3.1.1 Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas. $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Para calcular el punto de corte entre las rectas, se igualan las componentes x, y y z .
En este caso resulta más fácil igualar únicamente la componente x .

$$1 + 2\lambda = -1 \longrightarrow 2\lambda = -2 \longrightarrow \lambda = -1$$

Se sustituye el valor del parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta r y ya disponemos de las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

$$P: \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 - (-1) = 3 \end{cases} \longrightarrow P = (-1, -1, 3)$$

Las coordenadas del punto de corte entre ambas rectas son $P = (-1, -1, 3)$.

Ejercicio 3.1

3.1.2 La ecuación del plano que contiene a ambas rectas. $r: \begin{cases} P = (1,0,2) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q = (-1,0,1) \\ \vec{w} = (0,1,-2) \end{cases}$

Con los datos que hemos obtenido anteriormente podemos calcular la ecuación del plano directamente.

La ecuación del plano se puede obtener a partir de:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (z - 2) - (-1) \cdot (x - 1) - 2 \cdot (-2) \cdot (y - 0)$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x + 2 + 2z - 4 + x - 1 + 4y = -x + 4y + 2z - 3 = 0$$

La ecuación del plano que contiene a ambas rectas es $\pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$

Ejercicio 3.1

3.1.2 La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano. $\pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$$

Es evidente que la distancia debe ser cero, ya que el punto P pertenece a la recta r , y esta a su vez, pertenece al plano π .

La distancia del punto P a π es: **0 unidades**



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría

$$3x - y + 2z = 4$$

$$P = (-1, 0, 1)$$

Junio 2025 · Problema 3.2

Ejercicio 3.2

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1,0,1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2,1,2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

Se hace un esquema de la situación.

El vector normal de π , será director del plano pedido.

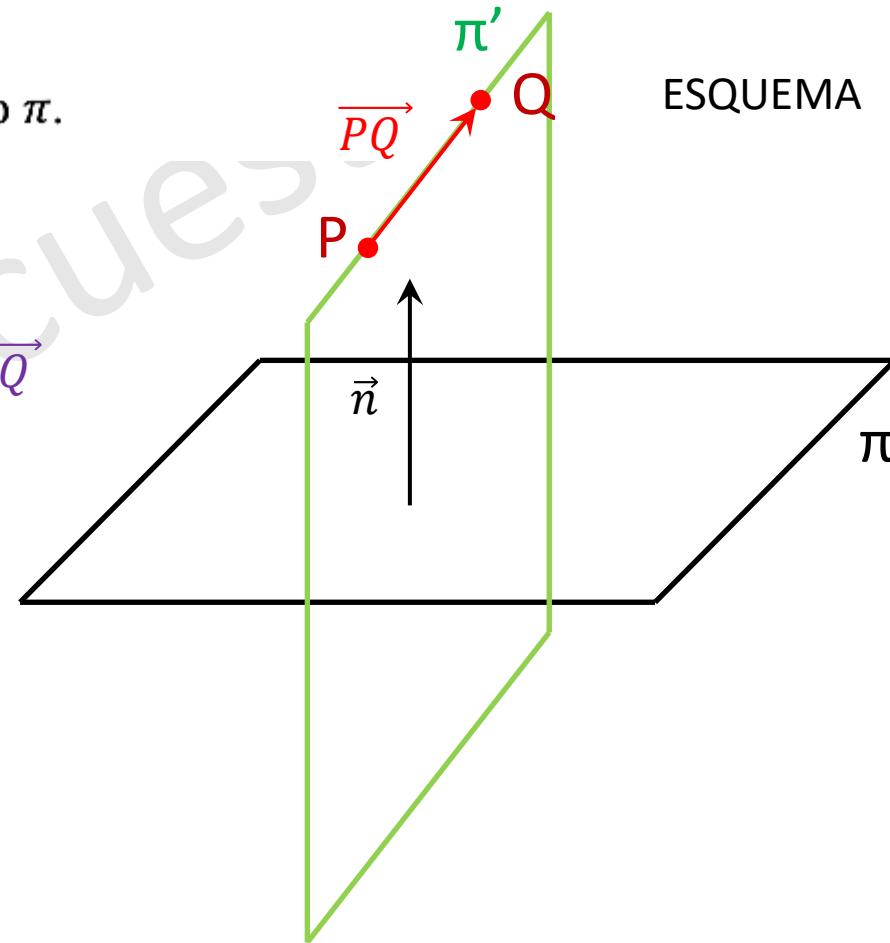
El plano pedido, π' , tendrá por vectores directores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{PQ}$ y pasará por P o Q .

El vector normal del plano π es: $\vec{n} = (3, -1, 2)$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,2) - (-1,0,1) = (3,1,1)$$

Ya tenemos todos los datos necesarios para calcular la ecuación de π' , lo hago en la siguiente diapositiva.



Ejercicio 3.2

3.2.1 La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q=(2,1,2)$.

Los datos son: $\vec{n} = (3, -1, 2)$ $\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 1)$ $P = (-1, 0, 1)$

La ecuación del plano se puede obtener a partir de:

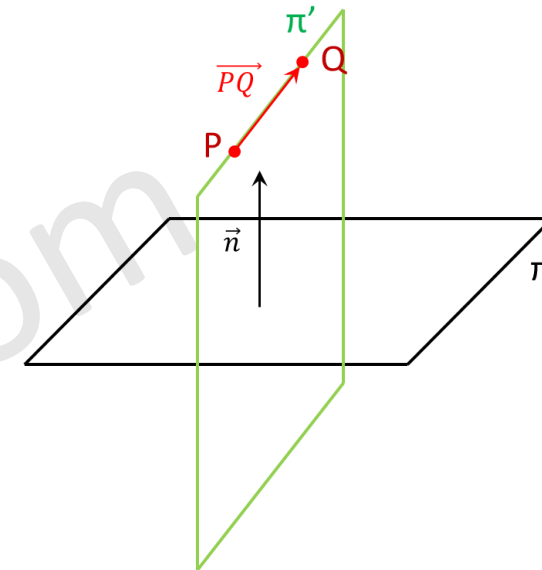
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ PQ_x & PQ_y & PQ_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ PQ_x & PQ_y & PQ_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 1 & y - 0 & z - 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 3y + 6z - 9 = 0$$

Puedo dividir a ambos lados de la igualdad por (-3) para simplificar la expresión de la ecuación del plano pedida.

$$\pi': x - y - 2z + 3 = 0$$

La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y Q es $\pi': x - y - 2z + 3 = 0$



Ejercicio 3.2

3.2.2 La distancia del punto Q al plano π . $\pi: 3x - y + 2z - 4 = 0$ $Q = (2,1,2)$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{Q\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5 \cdot \sqrt{14}}{14}$$

La distancia del punto Q a π es: $\frac{5 \cdot \sqrt{14}}{14}$ **unidades**

Ejercicio 3.2

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.3 El punto simétrico de P respecto al plano π .

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar perpendicular al plano que pase por P .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto P . $\vec{v}_r = \vec{n} = (3, -1, 2)$ $P = (-1, 0, 1)$

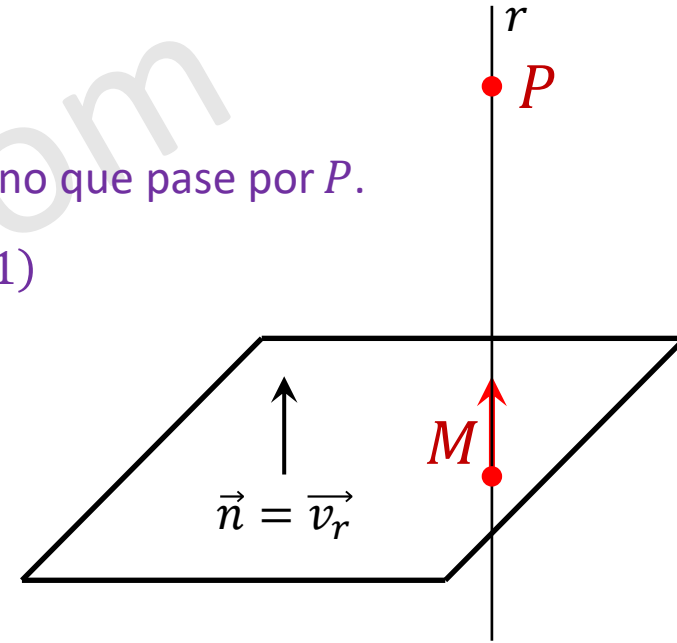
2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán. $r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. M

Se sustituye r en π :

$$3x - y + 2z = 4 \rightarrow 3 \cdot (-1 + 3\lambda) - (-\lambda) + 2 \cdot (1 + 2\lambda) = 4 \rightarrow 14\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{14}$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = \frac{5}{14}$ en r . $M: \begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{14} \\ y = -\frac{5}{14} \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{5}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \end{cases}$



Ejercicio 3.2

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.3 El punto simétrico de P respecto al plano π .

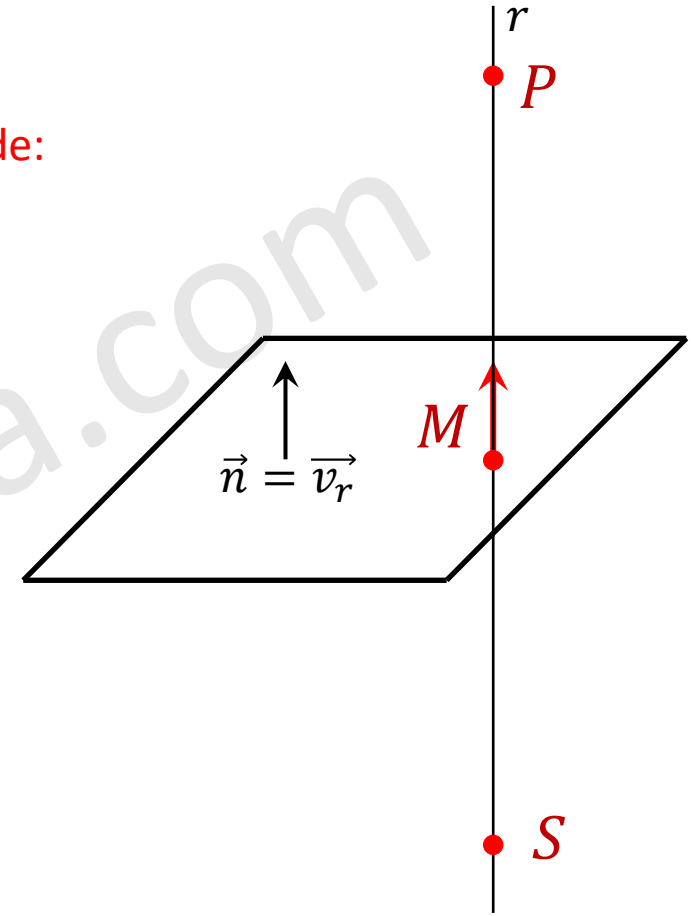
4) Se calcula el punto simétrico de P respecto de M .

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MS} \rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$$

Se sustituye, teniendo en cuenta que las coordenadas de los vectores coinciden con las componentes de los puntos.

$$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7} \right) - (-1, 0, 1) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7} \right)$$

El punto simétrico de P respecto al plano π es: $\left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7} \right)$



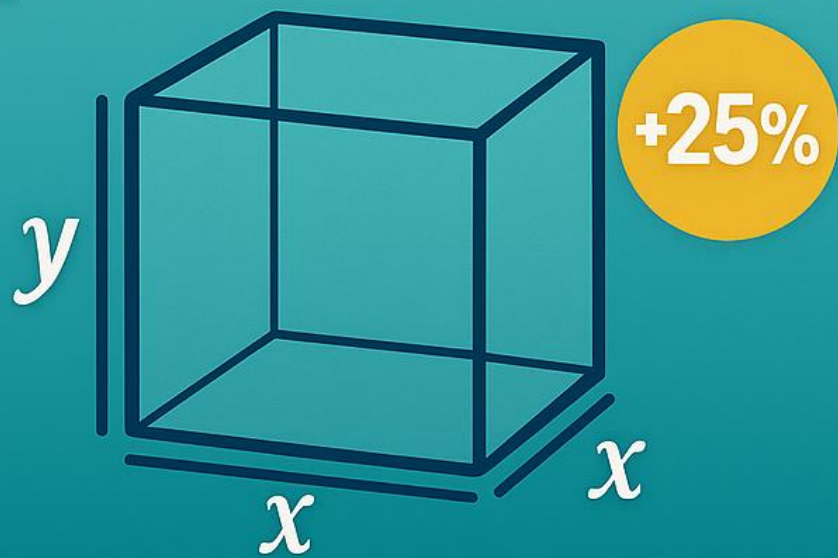


PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización



Junio 2025 · Problema 4.1



Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



Ejercicio 4.1

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

- 4.1.1 (0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .
- 4.1.2 (1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.
- 4.1.3 (0.5 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

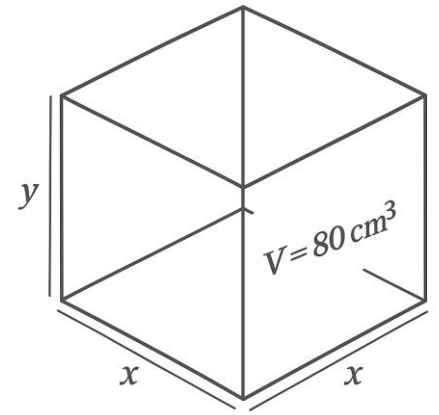
Ejercicio 4.1

4.1.1 La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

Se representa un esquema de la caja.

Se definen las variables del problema x : longitud de los lados de la base de la caja en cm;

y : longitud de la altura de la caja en cm.



Se obtienen las expresiones relacionadas con el coste del material necesario para construir la caja.

“El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 .” $1 \cdot 4 \cdot x \cdot y$:coste de las 4 caras laterales

“La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.” $1,25 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^2$:coste de la base y de la tapa.

El coste total en función de las variables x e y es:

$P(x, y) = 2,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y$: coste del material en céntimos de euro. x e y se miden en cm.

Para obtener la expresión en función de x , debemos utilizar el dato que relaciona las variables x e y .

“una caja de 80 cm^3 de volumen.” $V = x^2 \cdot y = 80 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

Se sustituye en la función en la siguiente diapositiva. ©Angel Cuesta Arza

Ejercicio 4.1

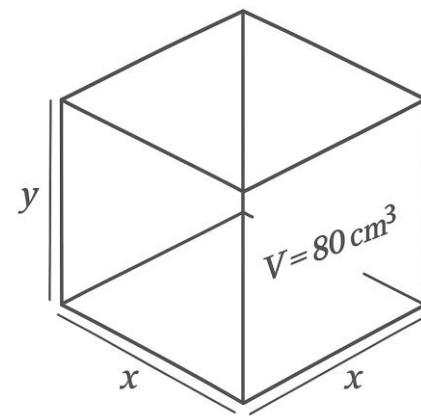
4.1.1 La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

$$P(x, y) = 2,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y; \quad y = \frac{80}{x^2}$$

Se expresa el coste del material de la caja en función de x .

$$P(x) = 2,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{80}{x^2} = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$$

El dominio de $P(x)$ es $x > 0$ (x en céntimos de euro).



La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x es. $P(x) = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$

Ejercicio 4.1

4.1.2 Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible

Calculo la derivada de la función $P(x)$.

$$P'(x) = 5 \cdot x - \frac{320}{x^2} \quad \text{Se iguala a cero para obtener el óptimo local.}$$

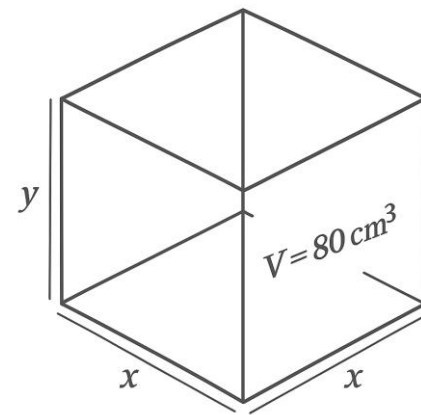
$$5 \cdot x - \frac{320}{x^2} = 0 \longrightarrow 5 \cdot x = \frac{320}{x^2} \longrightarrow x^3 = \frac{320}{5} = 64 \longrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Comprobamos que en $x = 4$, $P(x)$ tiene un mínimo relativo utilizando el **criterio de la segunda derivada**. También puedes hacer un estudio de signos.

$$P''(x) = 5 - \frac{0 \cdot x^2 - 320 \cdot 2x}{(x^2)^2} = 5 - \frac{-640}{x^3} = 5 + \frac{640}{x^3}$$

$$P''(4) = 5 + \frac{640}{4^3} > 0 \quad \text{Por lo tanto, } x = 4, P(x) \text{ tiene un mínimo relativo.}$$

$$\text{Calculo el valor de } y: y = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{4^2} = \frac{80}{16} = 5$$



$$P(x) = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$$

Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible son:

Lado de la base de la caja, $x_{\min} = 4 \text{ cm}$ y altura de la caja $y_{\min} = 5 \text{ cm}$.

Ejercicio 4.1

4.1.3 El precio del material en el caso anterior.

Recordamos que: $P(x) = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$

Se calcula $P(4)$.

$$P_{min} = P(4) = 2,5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 40 + 80 = 120 \text{ céntimos de euro} = 1,2 \text{ €}$$

El precio del material para construir la caja es **1,2 €**.



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Área bajo la curva

$$f(x) = x|x-2|$$

Junio 2025 · Problema 4.2

Ejercicio 4.2

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

www.angelcuesta.com

Ejercicio 4.2

4.2.1 Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

$$f(x) = x \cdot |x - 2|$$

Se expresa la función dada como función a trozos. Se recuerda la definición de la función valor absoluto de x .

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

De forma análoga se define la función $g(x) = |x - 2|$

$$|x - 2| = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } x - 2 < 0 \\ x - 2, & \text{si } x - 2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow |x - 2| = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } x < 2 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ya podemos definir $f(x) = x \cdot |x - 2|$

$$f(x) = x \cdot |x - 2| = \begin{cases} x \cdot (-x + 2), & \text{si } x < 2 \\ x \cdot (x - 2), & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x \cdot |x - 2| = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.2

4.2.1 Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ tiene por dominio todos los números reales. Por otro lado, tiene dos trozos definidos por funciones cuadráticas. Para representar de forma precisa la gráfica de la función en el intervalo propuesto, no sólo debemos dar valores a la función. Es obligatorio calcular los extremos relativos de la misma.

Calculo su derivada e igualo a cero cada trozo. $f'(x) = \begin{cases} -2x + 2, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x + 2 = 0, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 = 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1, & \text{si } x < 2 \\ x = 1, & \text{si } x > 2 \end{cases} \longrightarrow \text{Solución no válida}$$

Mediante el criterio de la segunda derivada compruebo si en $x = -1$ hay un máximo o un mínimo relativo (ya sé que es un máximo porque es una función cuadrática con signo negativo en el coeficiente cuadrático).

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 2 \\ \text{No se hace} \end{cases}$$

Puesto que $f''(1) = -2 < 0$; en $x = 1$ $f(x)$ tiene **un máximo relativo**

Ejercicio 4.2

4.2.1 Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

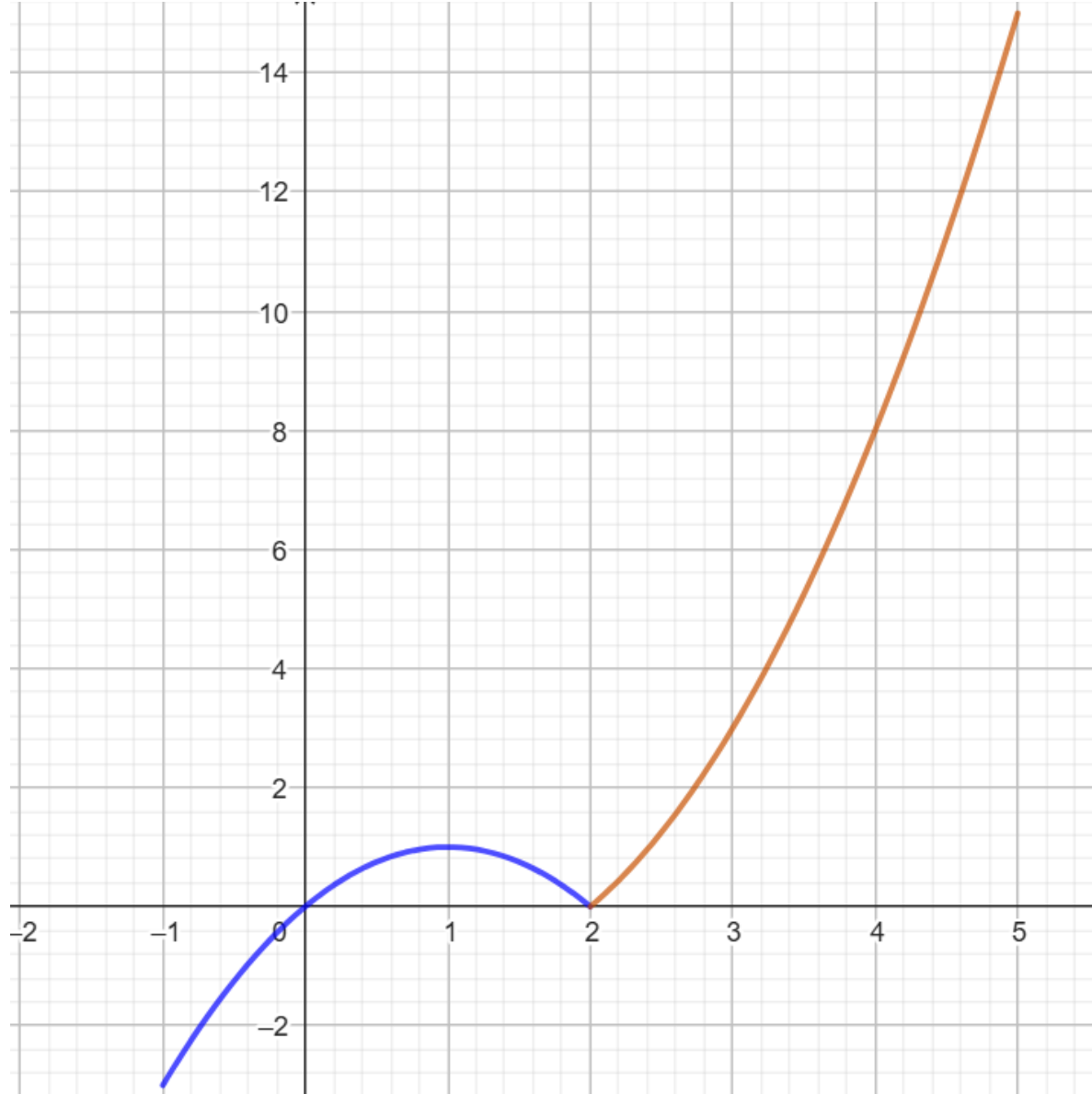
Conocida el valor de la abscisa del único extremo relativo, procedemos a dar valores a la función para representarla gráficamente.

x	$f(x) = -x^2 + 2x$
-1	-3
0	0
1	1
2	0

x	$f(x) = x^2 - 2x$
2	0
3	3
4	8
5	15

Se muestra la representación gráfica en la siguiente diapositiva para que se pueda ver bien.

Ejercicio 4.2



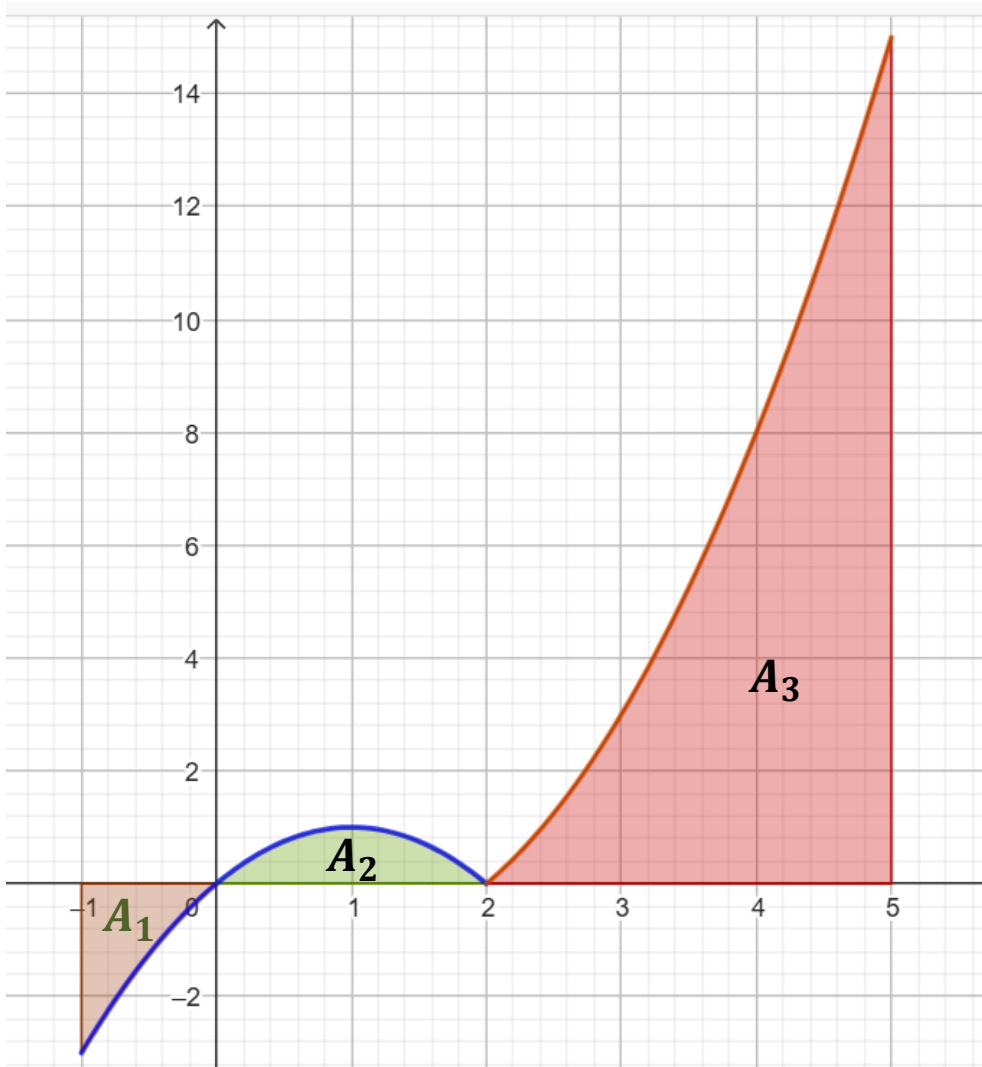
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

x	$f(x) = -x^2 + 2x$
-1	-3
0	0
1	1
2	0

x	$f(x) = x^2 - 2x$
2	0
3	3
4	8
5	15

Ejercicio 4.2

4.2.2 Calcular el área de la región anterior.



Como se puede comprobar hay 3 regiones diferenciadas. Por lo que debo calcular el área de cada región por separado y luego sumaras. Debes tener cuidado con la primera región, ya que el valor de la integral será negativo, pero debo tomar su valor absoluto porque no se aceptan valores negativos del área.

Las integrales que hay que calcular son:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 -x^2 + 2x \, dx \right|$$

$$A_2 = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx$$

$$A_3 = \int_2^5 x^2 - 2x \, dx$$

Ejercicio 4.2

4.2.2 Calcular el área de la región anterior.

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 -x^2 + 2x \, dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right| = \left| \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right) \right| = \left| 0 - \left(\frac{4}{3} \right) \right| = \frac{4}{3} \text{ u. a.}$$

$$A_2 = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2 \right) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3} \text{ u. a.}$$

$$A_3 = \int_2^5 x^2 - 2x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 5^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) = \frac{125}{3} - 25 - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 18 \text{ u. a.}$$

Calculo el área pedida:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{4 + 4 + 54}{3} = \frac{62}{3} \text{ u. a.}$$

El área de la región anterior es: $\frac{62}{3}$ **unidades de área**