



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Álgebra matricial

Junio 2025 · Problema 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.1

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

2.1.1 En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Se calcula en primer lugar la matriz A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot (1 - \alpha) \\ 0 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot (1 - \alpha) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot 0 & 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (1 - \alpha) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.1

2.1.1 En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Se recuerda que: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos y cada uno de sus elementos a_{ij} . Se igualan ambas matrices y sus elementos a_{ij} .

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 = 1 & \alpha = \alpha + \alpha^2 & 0 = 0 \\ 0 = 0 & \alpha = \alpha^2 & 0 = 0 \\ 0 = 0 & 0 = 0 & 1 - \alpha = (1 - \alpha)^2 \end{matrix}$$

Se obtiene el valor del parámetro que satisface todas y cada una de las igualdades.

$$\alpha = \alpha + \alpha^2 \rightarrow \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha^2 \rightarrow \alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha \cdot (\alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

$$1 - \alpha = (1 - \alpha)^2 \rightarrow (1 - \alpha)^2 - (1 - \alpha) = 0 \rightarrow (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1 \\ 1 - \alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Hay un único valor para el que la matriz es idempotente. $\alpha = 0$.

Ejercicio 2.1

2.1.2 En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos y en el proceso se calculará el valor de α para el cual la matriz tiene inversa. El valor del determinante se obtiene desarrollando por adjuntos.

$$1) \text{ Calculo } |A|; \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \alpha$$

Para que exista la matriz inversa de A , su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$(1 - \alpha) \cdot \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\exists A^{-1} \forall \alpha \in \mathfrak{R} - \{0, 1\}$.

Ejercicio 2.1

2.1.2 En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Se calcula ahora la matriz inversa. Recordamos que: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \alpha$

1) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (1 - \alpha) & 0 & 0 \\ -\alpha \cdot (1 - \alpha) & (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

2) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (1 - \alpha) & -\alpha \cdot (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

3) Aplico la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t = \frac{1}{(1 - \alpha) \cdot \alpha} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot (1 - \alpha) & -\alpha \cdot (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1 - \alpha) \end{pmatrix}$$