



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Junio 2025 • Problema 2.2

Ejercicio 2.2

Sea el sistema de ecuaciones donde a es un parámetro real. Se pide:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.2.1 Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado.

2.2.3 Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9a + 27$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $9a + 27 = 0 \longrightarrow a = -3$

Si $a \neq -3$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3$ $\xrightarrow[\text{3} \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3}$ $\text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -3$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

Ejercicio 2.2

2.2.1 Discutir el sistema en función del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Si $a = -3 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}]{\substack{F_2=3F_2-2F_1 \\ F_3=3F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 5 & 9 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$3F_2$	6	-9	-15	-9
$-2F_1$	-6	4	6	0
$F_2=3F_2-2F_1$	0	-5	-9	-9

F_3	0	5	9	9
F_2	0	-5	-9	-9
$F_3=F_3+F_2$	0	0	0	0

$3F_3$	3	3	6	9
$-F_1$	-3	2	3	0
$F_3=3F_3-F_1$	0	5	9	9

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene dos filas linealmente independientes. Para $a = -3$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Ejercicio 2.2

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a). Se aplica el teorema de Rouché para definir el tipo de sistema.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -3$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -3$	2	2	3	S.C.I.	Infinito

Ejercicio 2.2

2.2.2 Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado.

Para resolver el sistema de ecuaciones para $a = -3$ utilizaremos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior.

Asigno un parámetro a una de las incógnitas. En este caso $z = \lambda$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -5y - 9z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3\lambda = 0 \\ -5y - 9\lambda = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3\lambda \\ -5y = 9\lambda - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3\lambda \\ -5y = 9\lambda - 9 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &3x = 2y + 3\lambda \rightarrow 3x = 2 \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda\right) + 3\lambda \rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda\right) + \lambda \\ &y = \frac{-9\lambda + 9}{5} = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda \end{aligned} \rightarrow x = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\lambda + \lambda = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda$$

La solución del sistema si $a = -3$ es:

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.2

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.2.3 Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $a = -3$. Resolveré el sistema para $a = 0$, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 9a + 27 \xrightarrow{a=0} |A| = 27$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{0}{27} = 0 \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

La solución del sistema si $a = 0$ es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$