



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Junio 2025 • Problema 3.1

Ejercicio 3.1

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 **(1 punto)** Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 **(1 punto)** La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 **(0.5 puntos)** La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

Se calcula un punto y un vector director de las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (1,0,2) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 - 2y \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} Q = (-1,0,1) \\ \vec{w} = (0,1,-2) \end{cases}$$

Ejercicio 3.1

3.1.1 Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas. $r: \begin{cases} P = (1,0,2) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q = (-1,0,1) \\ \vec{w} = (0,1,-2) \end{cases}$

Compruebo si las rectas son paralelas o no.

Es fácil comprobar que los vectores $\vec{v} = (2,1,-1)$ y $\vec{w} = (0,1,-2)$ no son paralelos. $\frac{0}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-1}$

Se comprueba ahora si las rectas se cortan. Serán secantes si los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. Si son independientes, las rectas se cruzan.

$$\begin{vmatrix} -1-1 & 0-0 & 1-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 0 - (0 + 0 + 2) = 0 \quad \text{Las rectas son secantes.}$$

En la siguiente diapositiva se calculan las coordenadas del punto de corte entre ambas rectas.

Ejercicio 3.1

3.1.1 Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Para calcular el punto de corte entre las rectas, se igualan las componentes x, y y z .
En este caso resulta más fácil igualar únicamente la componente x .

$$1 + 2\lambda = -1 \longrightarrow 2\lambda = -2 \longrightarrow \lambda = -1$$

Se sustituye el valor del parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta r y ya disponemos de las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

$$P: \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 - (-1) = 3 \end{cases} \longrightarrow P = (-1, -1, 3)$$

Las coordenadas del punto de corte entre ambas rectas son $P = (-1, -1, 3)$.

Ejercicio 3.1

3.1.2 La ecuación del plano que contiene a ambas rectas. $r: \begin{cases} P = (1,0,2) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q = (-1,0,1) \\ \vec{w} = (0,1,-2) \end{cases}$

Con los datos que hemos obtenido anteriormente podemos calcular la ecuación del plano directamente.

La ecuación del plano se puede obtener a partir de:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (z - 2) - (-1) \cdot (x - 1) - 2 \cdot (-2) \cdot (y - 0)$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x + 2 + 2z - 4 + x - 1 + 4y = -x + 4y + 2z - 3 = 0$$

La ecuación del plano que contiene a ambas rectas es $\pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$

Ejercicio 3.1

3.1.2 La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano. $\pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$$

Es evidente que la distancia debe ser cero, ya que el punto P pertenece a la recta r , y esta a su vez, pertenece al plano π .

La distancia del punto P a π es: **0 unidades**